Hållfasthet Grunder



Varför lära sig mer om hållfasthet?

Kunskaper i hållfasthetslära är en förutsättning för att kunna designa säkra, hållbara och kostnadseffektiva konstruktioner.

Konstruktioner ska ofta:

- Ha låg vikt
- Vara styva och stabila
- Ha hög hållfasthet
- Ha lång livslängd

Några olika belastningstyper

Dragkrafter



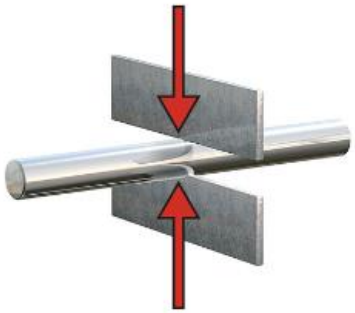
Tryckkrafter



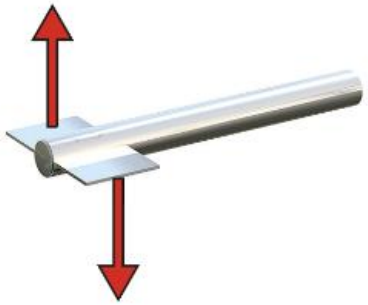
Böjbelastning



Skjuvbelastning



Vridbelastning



Begreppet Spänning (eng. Stress)

Spänning definieras i likhet med tryck som kraft per ytenhet. För en rak drag- eller tryckbelastad stång blir spänningen kraften dividerat med tvärsnittsarean. Spänning betecknas med den grekiska bokstaven sigma.



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

"sigma"

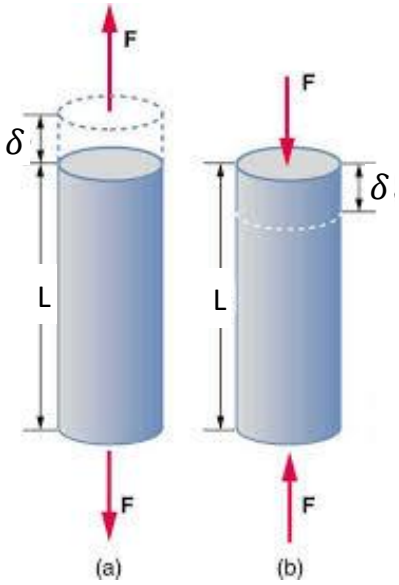
$$[MPa] = \left[\frac{N}{mm^2}\right]$$

*) Grundenheten för spänning är Pa, men brukar anges i MPa (megapascal).

**) Drag- och tryckspänning beräknas likadant. De flesta material är dock mer motståndskraftiga mot tryckbelastning.

Begreppet Töjning (eng. Strain)

När en konstruktion belastas kommer den att förlängas (töjas) och töjning definieras som förlängningen dividerad med den ursprungliga längden innan belastningen. Förlängningen betecknas vanligen med den grekiska bokstaven delta och töjningen med bokstaven epsilon.



$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

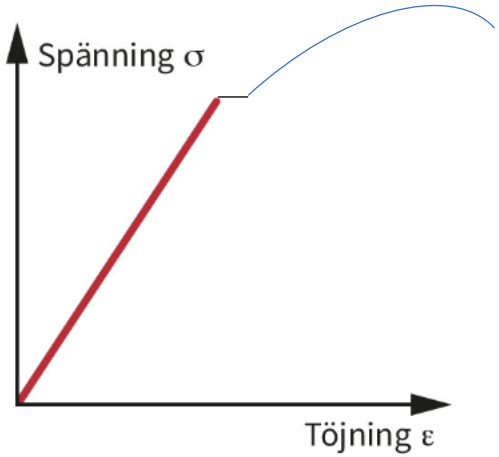
"epsilon"

$$[\,] = \left[\frac{mm}{mm}\right]$$

*) Även om enheten för töjning är dimensionslös anges den ofta i microstrain, där 1 microstrain = 10^{-6}.

Elasticitetsmodul (eng. Young's modulus)

Elasticitetsmodulen, även kallad E-modulen, är det linjära förhållandet mellan spänning och töjning. En drag/tryck-belastad stång fungerar som en linjär fjäder upp till en viss spänningsnivå. Detta förhållande kallas Hook's lag och gäller för de flesta metalliska material.



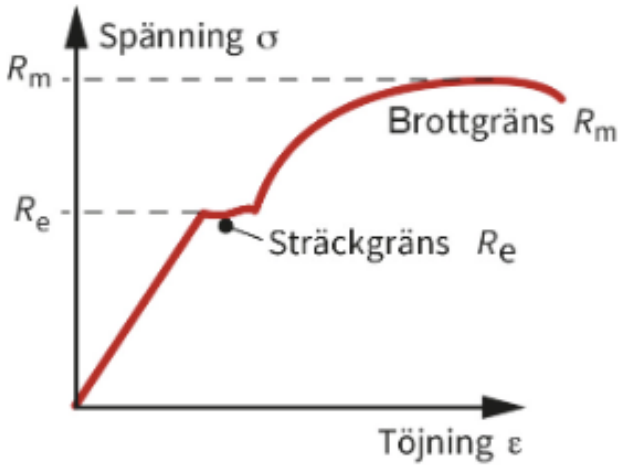
Hook's lag:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

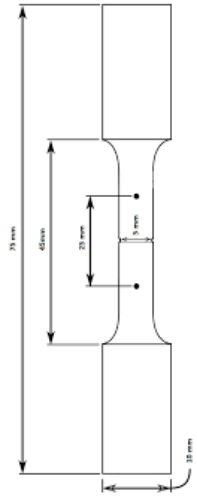
*) E-modulen för stål är ca 210000 MPa.

Dragprov

Ett materials hållfasthetsnivå anges med sträckgräns (R_e eller σ_s) respektive brottgräns (R_m eller σ_b). Dessa materialparametrar fastställs genom provning i en dragprovmaskin. Vissa stålmaterial saknar en tydlig sträckgräns och då används istället beteckningen $R_{p0.2}$, där 0.2 står för 0.2% töjning.

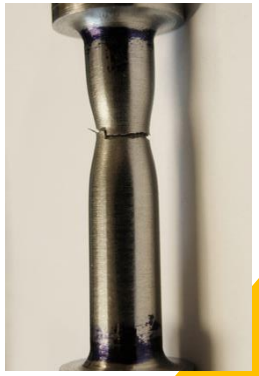


Sträck- och brottsgräns för stål.





Dragprovmaskin



Dragprovskuts

*) Förutom sträck- och brottgräns ger materialprovet även det så kallade A5-värdet, som anger procentuell förlängning av provstaven vid brott. Töjningen mäts över en längd motsvarande 5 x diametern, därav 5:an i beteckningen A5.

Hållfasthetsvärden för några vanliga konstruktionsstål (utdrag ur KB sid 50)

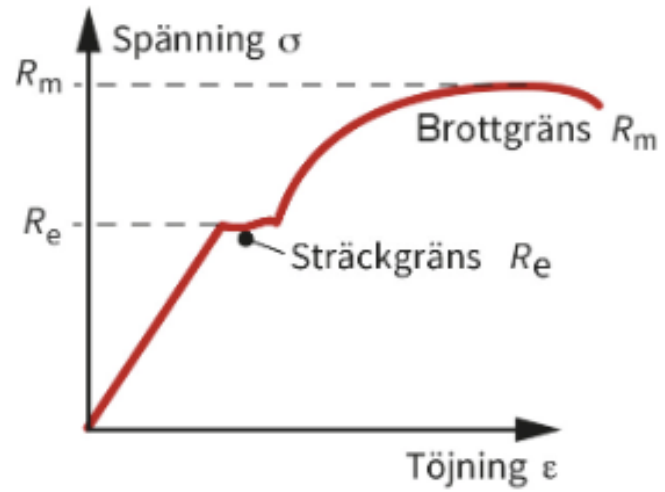
Allmänt konstruktionsstål (MNC 810) SS-EN 10025-2

	EN-namn SS-	Sammansättn. % C	Si	Mn max	Dragprovn. R_{eL}	R_{eH}	R_m	A_5 %	Slag-provn. t°C KV	Klass	Kvalitetsklass enligt International Institute of Welding
	S185 1300-00	—	—	—	—	—	320	—	—	—	
	S235JR 1311-0	0,12	0,25	-0,7	210	230	360	24	—	A	
	S235JRG2 ~ 1312-00	0,12	0,25	-0,7	210	230	360	24	—	B	
	1312-01	0,12	0,25	-0,7	200	—	360	27	—	B	
	1313-00,-01	0,12	0,25	-0,8	210	230	360	24	0	C	
	S275JR 1412-00	0,12	0,25	-1,1	250	260	430	23	—	B	
	1413-00,-01	0,12	0,25	-1,4	250	260	430	23	0	C	
	S275J2G4 1414-00	0,12	0,25	-1,4	250	260	430	23	-20	D	
Mikrolegerade (Finkornstål)	**S355JO** 2132-01	0,14	0,35	-1,6	350	—	510	22	—	B	
	2133-01	0,14	0,35	-1,6	350	—	510	22	0	C	
	S355N 2134-01	0,14	0,35	-1,6	350	—	510	22	-20	D	
	S355NL 2135-01	0,14	0,35	-1,6	350	—	510	22	-40	E	
	SS-EN 10025-4										
	2142-01	0,16	0,35	-1,8	390	—	530	20	—	B	
	S420N 2143-01	0,16	0,35	-1,8	390	—	530	20	0	C	
	S420M 2144-01	0,16	0,35	-1,8	390	—	530	20	-20	D	
	2145-01	0,16	0,35	-1,8	390	—	530	20	-40	E	
	S355JR 2172-00	0,18	0,30	-1,6	300	320	490	21	—	B	
	2173-00,-01	0,14	0,35	-1,4	300	320	490	21	0	C	
	S355J2G3 2174-00,-01	0,14	0,35	-1,4	300	320	490	21	-20	D	

R_{eL} = undre sträckgräns
R_{eH} = övre sträckgräns
R_m = minbrottgräns

Begreppet Säkerhetsfaktor

I de allra flesta konstruktioner vill man att materialet ska återgå till sin ursprungliga form som det hade innan belastningen. Man måste då se till att hålla sig inom det elastiska området. För att täcka upp mot diverse osäkerheter i till exempel material och krafter, används i regel en säkerhetsmarginal mot sträckgränsen men kan också vara mot brottgränsen. Denna marginal kallas säkerhetsfaktor.



Sträck- och brottsgräns för stål.

$$\text{sf} = \frac{R_e}{\sigma}$$

$$\text{sf} = \frac{R_m}{\sigma}$$

*) För ett normalt lastfall är det vanligt med en säkerhetsfaktor på 1.5 mot sträckgränsen . För exceptionella lastfall kan man ofta tillåta sig en säkerhetsfaktor ned mot 1.2 och i vissa fall t o m ner mot 1.0.

Fjäderstyvheten i en stång

Så länge vi befinner oss under sträckgränsen kommer en stång att bete sig som en linjär fjäder med en fjäderstyvhet k. Denna kan härledas utifrån de formler för spänning, töjning och Hook's lag som vi lärt oss.



$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \sigma = \dfrac{F}{A} \\ \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} \end{cases}$$

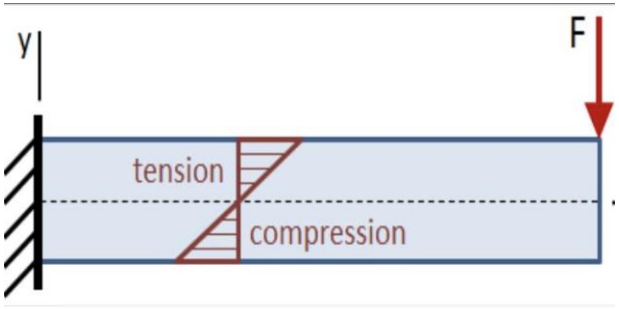
$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon \cdot L} = \frac{E \cdot \varepsilon \cdot A}{\varepsilon \cdot L}$$

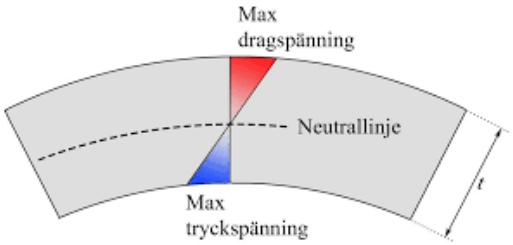
$$k = \frac{E \cdot A}{L}$$

$$\left[\frac{N}{mm}\right] = \left[\frac{\frac{N}{mm^2} \cdot mm^2}{mm}\right]$$

Begreppet Böjspänning

Böjspänning uppstår som reaktion på momentbelastning. Böjspänning är egentligen en drag-/tryckspänning linjärt fördelad genom tvärsnittet. Den maximala böjspänningen beräknas som momentet dividerat med det så kallade böjmotståndet som beror av tvärsnittets form.





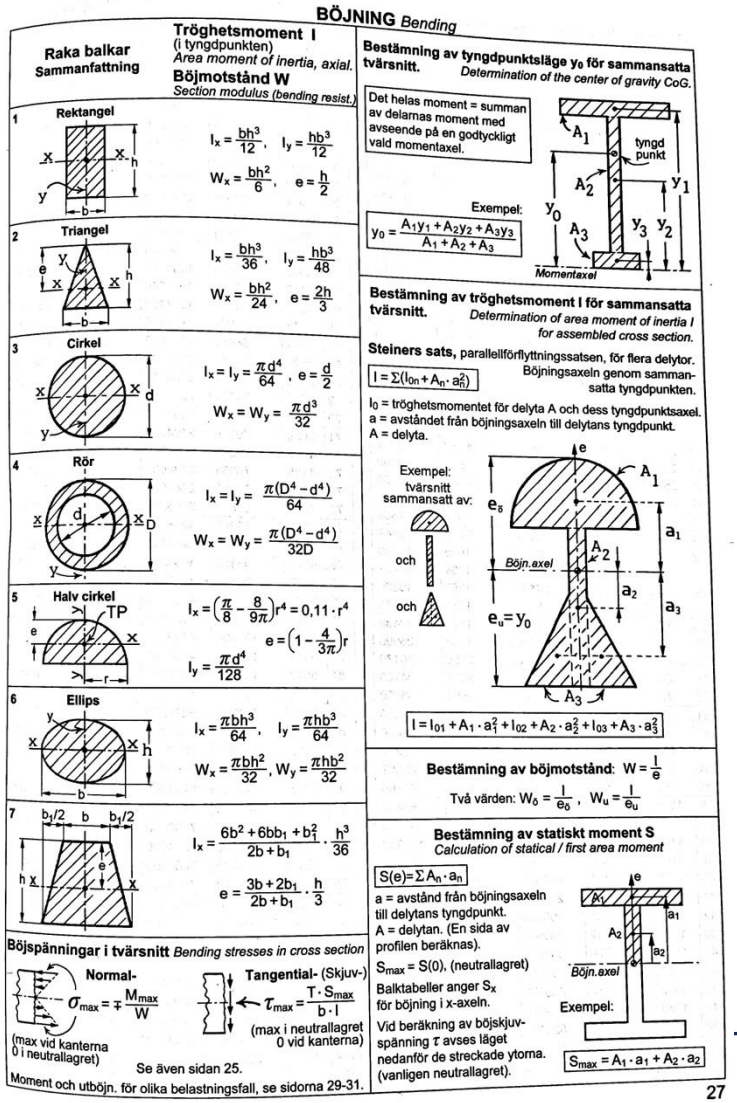
$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$$

"sigma böj"

$$\left[\frac{N \cdot mm}{mm^3}\right] = \left[\frac{N}{mm^2}\right] = [MPa]$$

*) Böjmotståndet W_b beror av tvärsnittets form. För ett rektangulärt tvärsnitt beräknas böjmotståndet som $W_b = \frac{b \cdot h^2}{6}$

Böjmotstånd för några vanliga tvärsnitt (utdrag ur KB sid 27)



BÖJNING *Bending*

Raka balkar
Sammanfattning

Tröghetsmoment I
(i tyngdpunkten)
Area moment of inertia, axial.
Böjmotstånd W
Section modulus (bending resist.)

1 **Rektangel**

$I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_y = \frac{hb^3}{12}$

$W_x = \frac{bh^2}{6}$, $e = \frac{h}{2}$

2 **Triangel**

$I_x = \frac{bh^3}{36}$, $I_y = \frac{hb^3}{48}$

$W_x = \frac{bh^2}{24}$, $e = \frac{2h}{3}$

3 **Cirkel**

$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$, $e = \frac{d}{2}$

$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$

4 **Rör**

$I_x = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$

$W_x = W_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}$

5 **Halv cirkel**

$I_x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 = 0{,}11 \cdot r^4$

$e = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) r$

$I_y = \frac{\pi d^4}{128}$

6 **Ellips**

$I_x = \frac{\pi bh^3}{64}$, $I_y = \frac{\pi hb^3}{64}$

$W_x = \frac{\pi bh^2}{32}$, $W_y = \frac{\pi hb^2}{32}$

7

$I_x = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{2b + b_1} \cdot \frac{h^3}{36}$

$e = \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1} \cdot \frac{h}{3}$

Böjspänningar i tvärsnitt *Bending stresses in cross section*

Normal- $\sigma_{max} = \mp \frac{M_{max}}{W}$
(max vid kanterna
0 i neutrallagret)

Tangential- (Skjuv-) $\tau_{max} = \frac{T \cdot S_{max}}{b \cdot I}$
(max i neutrallagret
0 vid kanterna)

Se även sidan 25.

Moment och utböjn. för olika belastningsfall, se sidorna 29-31.

Bestämning av tyngdpunktsläge y_0 för sammansatta tvärsnitt. *Determination of the center of gravity CoG.*

Det helas moment = summan av delarnas moment med avseende på en godtyckligt vald momentaxel.

Exempel:

$$y_0 = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Momentaxel

Bestämning av tröghetsmoment I för sammansatta tvärsnitt. *Determination of area moment of inertia I for assembled cross section.*

Steiners sats, parallellförflyttningssatsen, för flera delytor. Böjningsaxeln genom sammansatta tyngdpunkten.

$$I = \Sigma(I_{on} + A_n \cdot a_n^2)$$

I_o = tröghetsmomentet för delyta A och dess tyngdpunktsaxel.
a = avståndet från böjningsaxeln till delytans tyngdpunkt.
A = delyta.

Exempel:
tvärsnitt sammansatt av:
och
och

Böjn.axel

$$I = I_{01} + A_1 \cdot a_1^2 + I_{02} + A_2 \cdot a_2^2 + I_{03} + A_3 \cdot a_3^2$$

Bestämning av böjmotstånd: $W = \frac{I}{e}$

Två värden: $W_o = \frac{I}{e_o}$, $W_u = \frac{I}{e_u}$

Bestämning av statiskt moment S
Calculation of statical / first area moment

$$S(e) = \Sigma A_n \cdot a_n$$

a = avstånd från böjningsaxeln till delytans tyngdpunkt.
A = delytan. (En sida av profilen beräknas).
$S_{max} = S(0)$, (neutrallagret)
Balktabeller anger S_x för böjning i x-axeln.
Vid beräkning av böjskjuvspänning τ avses läget nedanför de streckade ytorna. (vanligen neutrallagret).

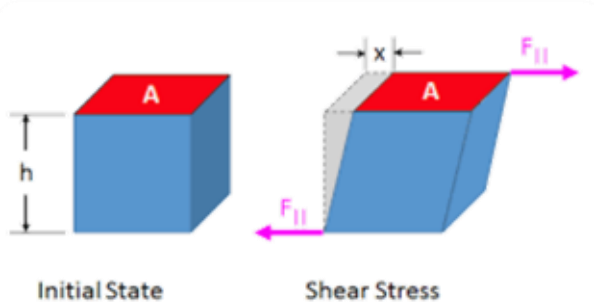
Böjn.axel

Exempel:

$$S_{max} = A_1 \cdot a_1 + A_2 \cdot a_2$$

Begreppet Skjuvspänning

Skjuvspänning uppstår som reaktion till tvärgående belastning. Skjuvspänningen beräknas som kvoten mellan tvärkraften och skjuvarean. Materialet är mindre motståndskraftigt mot tvärbelastning varför man tillåten en lägre skjuvspänning än dragspänning.



$$\tau = \frac{F}{A}$$

"tau"

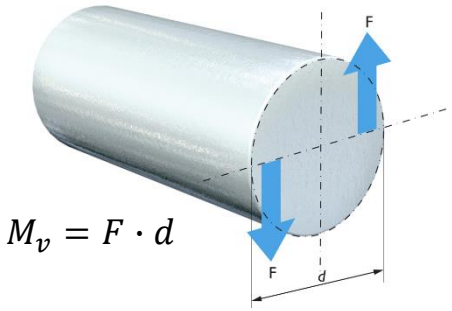
$$\left[\frac{N}{mm^2}\right] = [MPa]$$

*) Tillåten skjuvspänning beräknas som tillåten dragspänning dividerat med roten ur tre.

$$\tau_{till} = \frac{\sigma_{till}}{\sqrt{3}} \approx 0.6 \cdot \sigma_{till}$$

Begreppet Vridskjuvspänning

Skjuvspänning uppstår som reaktion till vridande belastning. Den maximala vridskjuvspänningen beräknas som vridmomentet dividerat med det så kallade vridmotståndet som beror av tvärsnittets form.



$M_v = F \cdot d$

$$\tau_v = \frac{M_v}{W_v}$$

"tau vrid"

$$\left[\frac{N \cdot mm}{mm^3}\right] = \left[\frac{N}{mm^2}\right] = [MPa]$$

*) Vridmotståndet W_v beror av tvärsnittets form. För ett cirkulärt tvärsnitt beräknas vridmotståndet som $W_v = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$

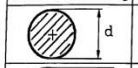
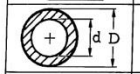
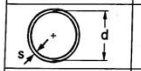
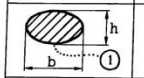
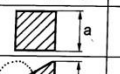
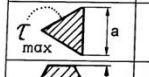
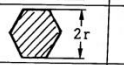
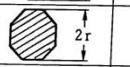
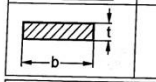
*) Tillåten vridskjuvspänning beräknas som tillåten dragspänning dividerat med roten ur tre.

$$\tau_{till} = \frac{\sigma_{till}}{\sqrt{3}} \approx 0.6 \cdot \sigma_{till}$$

Vridmotstånd för några vanliga tvärsnitt (utdrag ur KB sid 26)

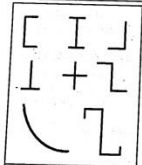
VRIDNING *Torsion (twisting)*

VRIDTRÖGHETSMOMENT I_v *Torsional moment of inertia (rotational inertia)*
VRIDMOTSTÅND W_v *Torsional section modulus (torque resistance)*

Tvärsnitt av rak stång	Vridtröghetsmoment I_v	Vridmotstånd W_v	Anmärkningar, exempel
	$I_v = I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$W_v = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$	Ex. d=4 cm: $I_v = \frac{\pi \cdot 4^4}{32} = \pi \cdot 8 = 25{,}2\ cm^4$; $W_v = \frac{\pi \cdot 4^3}{16} = 12{,}6\ cm^3$
	$I_v = I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$	$W_v = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16 \cdot D}$	**Tjockt rör.** *Thick walled tube.* Ex. D=6 d=4 cm: $W_v = \frac{\pi \cdot (36+16)(36-16)}{16 \cdot 6} = 34\ cm^3$
	$I_v = I_p = \frac{\pi}{4} s \cdot d^3$	$W_v = \frac{\pi}{2} s \cdot d^2$	**Tunna rör.** *Thin walled tube.* Approximativ formel. s = väggtjocklek, d = medeldiameter
	$I_v = \frac{\pi \cdot h^3 \cdot b^3}{16(h^2 + b^2)}$	$W_v = \frac{\pi}{16} bh^2$	**Ellips.** *Ellipse.* Största skjuvspänning i punkt 1. Ex. b=8 h=4 cm: $W_v = \frac{\pi}{16} \cdot 8 \cdot 4^2 = 25{,}2\ cm^3$, b>h
	$I_v = 0{,}14 \cdot a^4$	$W_v = 0{,}208 \cdot a^3$	**Kvadrat.** *Square.* Största skjuvspänning mitt på sidan.
	$I_v = \frac{\sqrt{3}}{80} \cdot a^4$	$W_v = \frac{a^3}{20}$	**Triangel.** *Equilateral triangle.* Största skjuvspänning mitt på sidan. Ex. a=5 cm: $W_v = 5 \cdot 5 \cdot 5/20 = 6{,}25\ cm^3$
	$I_v = 1{,}847 \cdot r^4$	$W_v = 1{,}51 \cdot r^3$	**Regelbunden sexhörning.** *Regular hexagon.* Största skjuvspänning mitt på sidan.
	$I_v = 1{,}726 \cdot r^4$	$W_v = 1{,}48 \cdot r^3$	**Regelbunden åttahörning.** *Regular octagon.* Största skjuvspänning mitt på sidan.
	$I_v = \beta \frac{b \cdot t^3}{3}$	$W_v = \alpha \frac{b \cdot t^2}{3}$	**Rektangel.** *Rectangle.* Största skjuvspänning mitt på längre sidan. Ex. b=12 t=2 cm: $\Rightarrow \beta \approx 0{,}9$ $I_v = 0{,}9 \cdot \frac{12}{3} \cdot 2^3 = 29\ cm^4$

Korrektionsfaktorer β och α för I_v och W_v vid rektangulärt tvärsnitt. b > t

b/t	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
β	0,420	0,588	0,687	0,789	0,843	0,897	0,921	0,939	1,0
α	0,624	0,693	0,738	0,801	0,846	0,898	0,921	0,939	1,0



$I_v = \frac{1}{3} \Sigma b \cdot t^3$

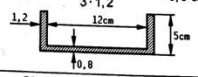
Approximativ formel. 10 till 30% ökning för vissa tvärsnittsformer enligt vidstående bild.

$W_v = \frac{\Sigma b \cdot t^3}{3 \cdot t_{max}}$

Vid inåtgående hörn uppträder spänningskoncentrationer som kan bli 50% större.

Öppen profil.
Tvärsnitt sammansatt av rektanglar. Största skjuvspänning mitt på den rektangel, som har största tjockleken.

Ex. $W_v = \frac{12 \cdot 0{,}8^3 + 2 \cdot 5 \cdot 1{,}2^3}{3 \cdot 1{,}2} = 6{,}5\ cm^3$



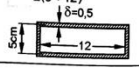


$I_v = \frac{4 \cdot A^2}{\int \frac{ds}{\delta}}$ $\quad W_v = 2 \cdot A \cdot \delta_{min}$

Bredts formler

Sluten godtycklig profil
med variabel väggtjocklek (tunn).
A = den av medellinjen omslutna arean.
Om δ = konstant blir $\int ds/\delta = s/\delta$.

Ex. $I_v = \frac{4(5 \cdot 12)^2}{2(5+12)} \cdot 0{,}5 = 212\ cm^4$



Begreppet Effektivspänning

Då flera olika belastningstyper förekommer samtidigt brukar man jämföra materialets tillåtna spänning med den så kallade effektivspänningen.

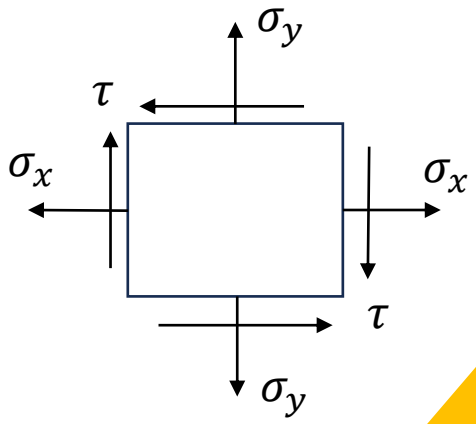
Man kan beräkna effektivspänningen på materialets yta som:

Tvåaxligt fall:

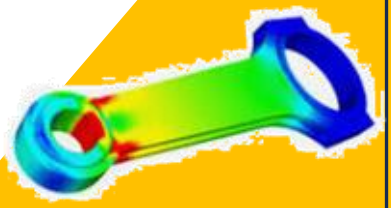
$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau^2}$$

Enaxligt fall ($\sigma_y = 0$):

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau^2}$$



*) Effektivspänningen ovan kallas ofta von Mises spänning efter den österikiske fysikern Richard von Mises. Då beräkning av effektivspänningen kan bli ganska omständig, använder man numera ofta datorteknik (sk FEA) för att ta fram effektivspänningen hos komplexa geometrier. Spänningen kan då presenteras som en färgskala över strukturen.

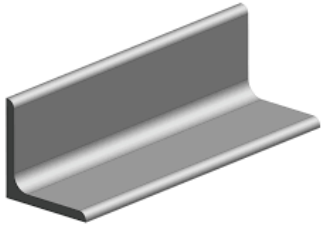


Några färdiga formvaror - Profiler

För fabrikstillverkade formprofiler finns färdigberäknade uppgifter om tyngdpunktsläge, tvärsnittsarea, yttröghetsmoment mm.



U-profiler finns bl a i varianterna UNP, UPE och USP



Vinkelstänger (även kallade L-profiler) finns som både likflänsiga och olikflänsiga



T-stång

Några färdiga formvaror - Profiler



I-profiler finns bl a i varianterna IPE och I-stång



H-profiler finns bl a i varianterna HEA, HEB och HEM



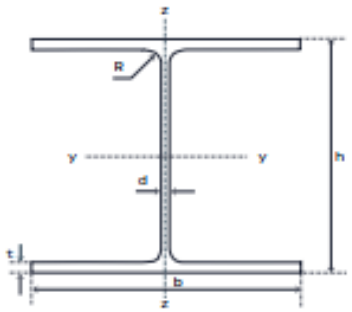
VKR-profiler (kallas även RHS-profil) finns i både kvadratisk och rektangulär form

Exempel på tabellerade profilvärden (utdrag ur Tibnors konstruktionstabeller)

HEB-balk

006

S355J2



Tvärsnittsdata

Profil nr	Tvärsnittsmått					Area och massa				Böjning kring y-axeln			
	h	b	t	d	R	F	A	A_{liv}	g	I_y	$W_{el,y}$	$W_{pl,y}$	i_y
HEB 100	100	100	10,0	6,0	12	0,567	2604	480	20,4	449,5	89,9	104	41,6
HEB 120	120	120	11,0	6,5	12	0,686	3401	637	26,7	864,4	144	165	50,4
HEB 140	140	140	12,0	7,0	12	0,805	4296	812	33,7	1509	216	245	59,3
HEB 160	160	160	13,0	8,0	15	0,918	5425	1072	42,6	2492	311	354	67,8
HEB 180	180	180	14,0	8,5	15	1,04	6525	1292	51,2	3831	426	481	76,6
HEB 200	200	200	15,0	9,0	18	1,15	7808	1530	61,3	5696	570	643	85,4
HEB 220	220	220	16,0	9,5	18	1,27	9104	1786	71,5	8091	736	827	94,3
HEB 240	240	240	17,0	10,0	21	1,38	10600	2060	83,2	11260	938	1050	103
HEB 260	260	260	17,5	10,0	24	1,50	11840	2250	93,0	14920	1150	1280	112
HEB 280	280	280	18,0	10,5	24	1,62	13140	2562	103	19270	1380	1530	121
HEB 300	300	300	19,0	11,0	27	1,73	14910	2882	117	25170	1680	1870	130
HEB 320	320	300	20,5	11,5	27	1,77	16130	3209	127	30820	1930	2150	138
HEB 340	340	300	21,5	12,0	27	1,81	17090	3564	134	36660	2160	2410	146
HEB 360	360	300	22,5	12,5	27	1,85	18060	3938	142	43190	2400	2680	155
HEB 400	400	300	24,0	13,5	27	1,93	19780	4752	155	57680	2880	3230	171
HEB 450	450	300	26,0	14,0	27	2,03	21800	5572	171	79890	3550	3990	191