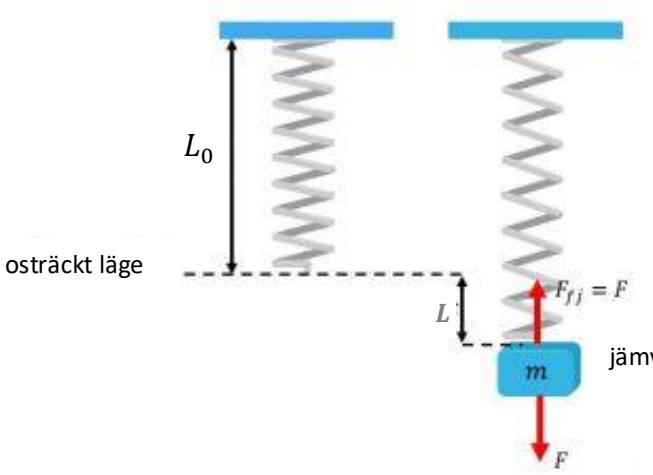
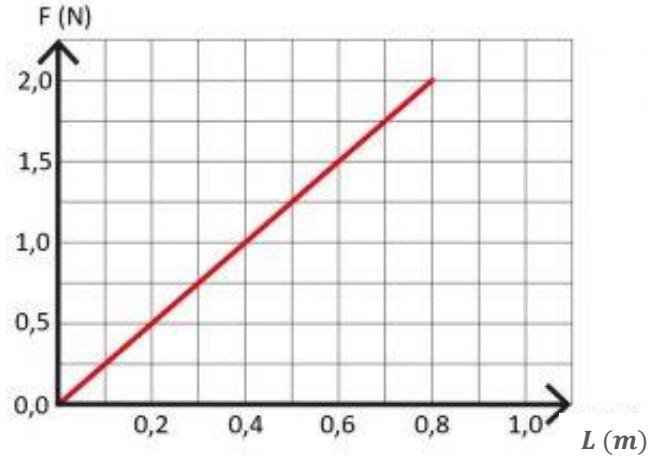
Fjädrar och harmonisk svängning

En mekanisk fjäder har ett jämviktsläge och för att dra ut eller trycka ihop fjädern från dess jämviktsläge krävs en kraft som är proportionell mot förlängningen/förkortningen. Sambandet kallas Hookes lag där proportionalitetskonstanten kallas fjäderkonstanten k.

$$F_{fj} = k \cdot L$$

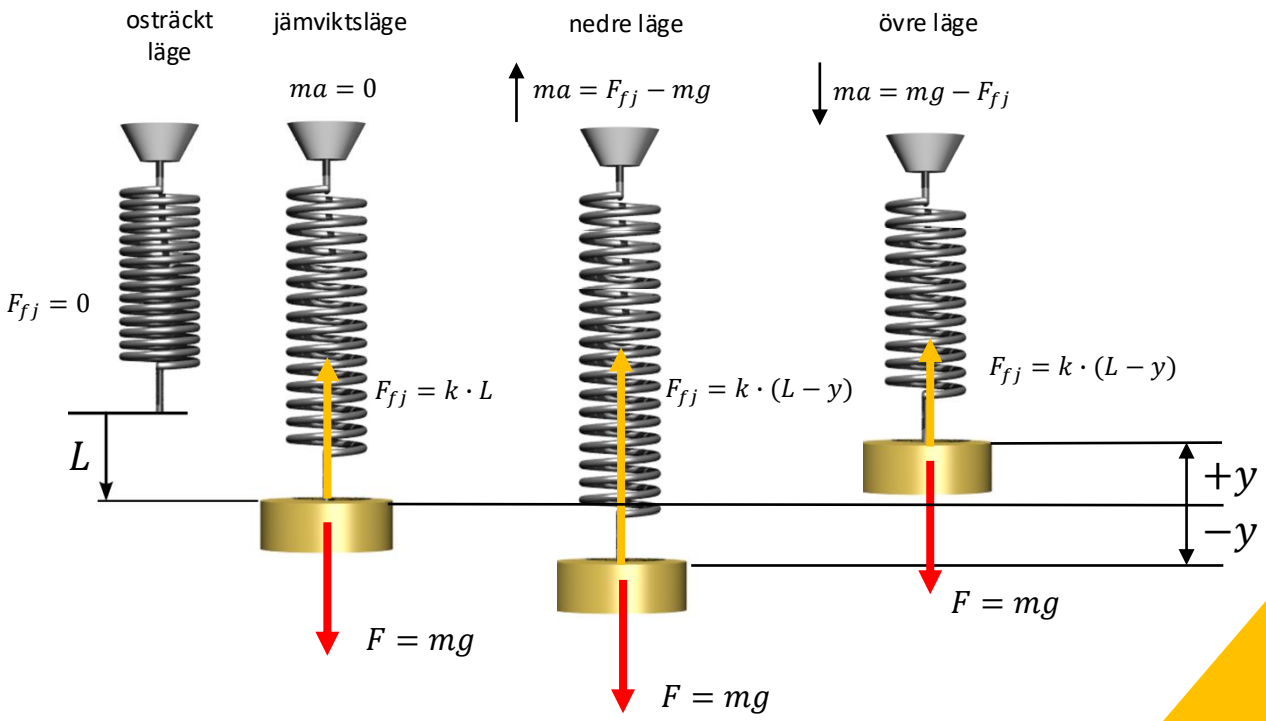




I jämviktsläget kan fjäderkraften sättas lika med tyngdkraften: $kL = mg$

Fjäderns mekanik

Fjäderns kraft är alltid dess fjäderkonstant multiplicerad med den totala förlängningen. Om fjädern befinner sig i jämviktsläget är fjäderkraften lika stor som massans tyngdkraft. Om fjädern däremot inte befinner sig i jämviktsläget är massan i accelleration uppåt eller nedåt beroende på om massan befinner sig nedanför eller ovanför jämviktsläget.



Var tog den potentiella energin $E_p = mgh$ vägen?

Varför kan man sätta $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ky^2$ i jämviktsläget utan att ta hänsyn till mgh?

<u>Osträckt läge kontra jämviktsläget:</u>
När vi hänger på massan på den osträckta fjädern sänks massan sträckan L och lägesenergin mgL omvandlas till den elastiska energin $\frac{1}{2}kL^2$ samt rörelseenergin $\frac{1}{2}mv^2$.

$$mgL = \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

<u>Osträckt läge kontra undre vändläget:</u>
Den totala sträckan $(L + y)$ frigör lägesenergin $mg(L + y)$ som omvandlas till den elastiska energin $\frac{1}{2}k(L + y)^2$. I undre vändläget är hastigheten noll och vi har således ej heller någon rörelseenergi.

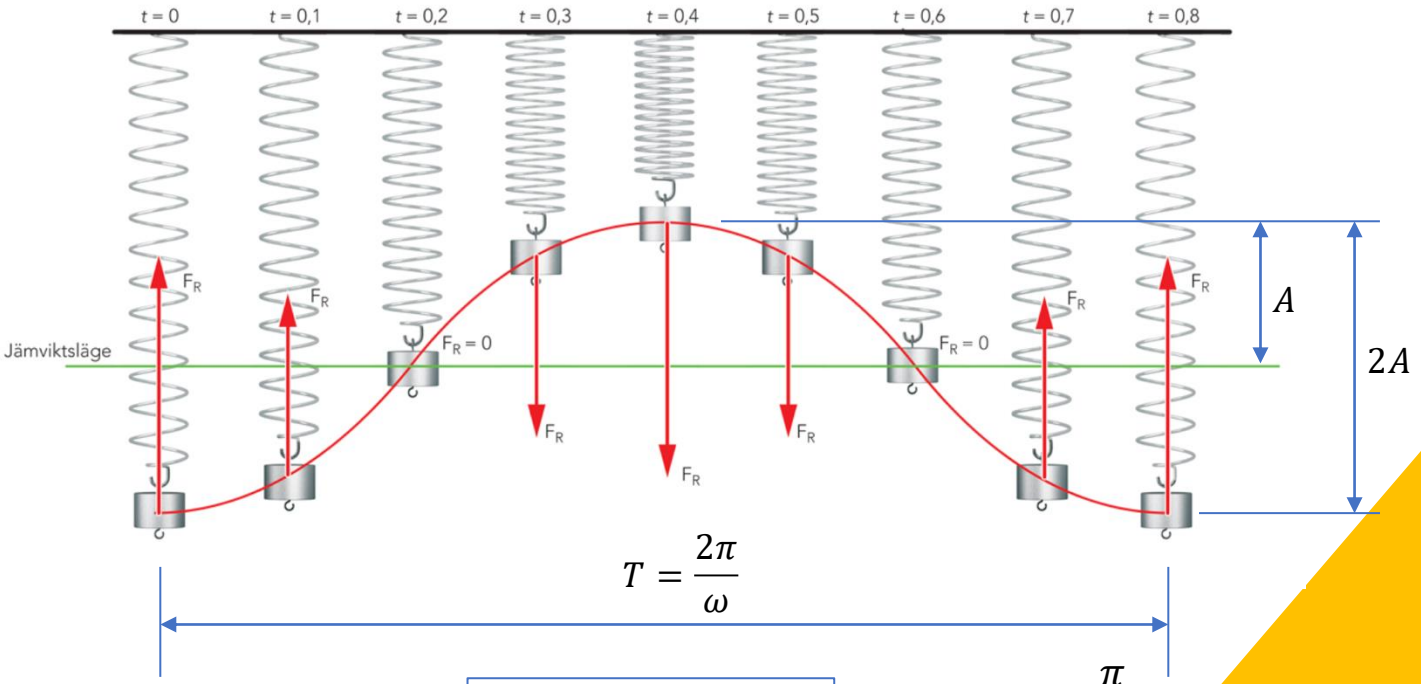
$$mg(L + y) = \frac{1}{2}k(L + y)^2$$

$$mgL = -mgy + \frac{1}{2}kL^2 + kLy + \frac{1}{2}ky^2 = -mgy + \frac{1}{2}kL^2 + \text{mgy} + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{2}ky^2 \quad (2)$$

$(1) = (2) \Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}mv^2}$

Harmonisk svängning

Om vi drar ned en enkel vertikal fjädermassa en viss längd och släpper den kommer den att oscillera upp och ned i form av en sinusvåg. Detta kallas harmonisk svängning.



$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad (\varphi = -\frac{\pi}{2})$$

*) A = amplitud, 2A = vidd, ω = vinkelhastighet, T = period och φ = fasvinkel.

Harmonisk svängningsrörelse som funktion

I likhet med linjär rörelse kan harmonisk svängning beskrivas som position, hastighet eller accelleration.

Position $$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Hastighet $$v_y = \frac{dy}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

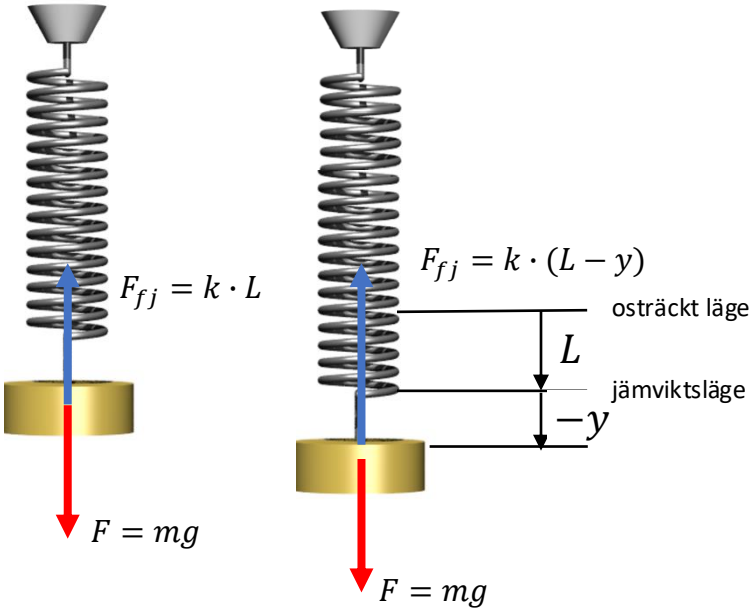
Accelleration $$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Fasvinkeln φ är den vinkel som anger sinuskurvans förskjutning relativt ett referenskoordinatsystem. Eftersom cosinuskurvan är förskjuten 90 grader åt vänster i förhållande till sinuskurvan, kan cosinusfunktionen också skrivas som en sinusfunktion med en justerad fasvinkel. Accelerationen är negativ vilket innebär att den motriktad den definierade lägespositionen y.

*) I olika beräkningsexempel är fasvinkeln ofta ointressant och kan då sättas till noll.
**) Då max absolutvärde för sinus och cosinus är 1 => $v_{max} = A\omega$ och $a_{max} = A\omega^2$

Begreppet egenfrekvens (resonans)

Alla mekaniska strukturer har så kallade egenfrekvenser med en lägsta grundfrekvens. I praktiska konstruktionssammanhang vill man ofta unvika egenfrekvenser då dessa kan leda till okontrollerbara krafter och i värsta fall haverier. Rörelsen för en enkel fjädermassa kan beskrivas med en differentialekvation ur vilken man kan bestämma dess egenfrekvens.



$$\uparrow \quad my'' = k(L - y) - mg = mg - ky - mg$$

$$my'' + ky = 0$$

$$-mA\omega^2 \sin(\omega t) + k\,A \sin(\omega t) = 0$$

$$A\sin(\omega t) \cdot (-m\omega^2 + k) = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

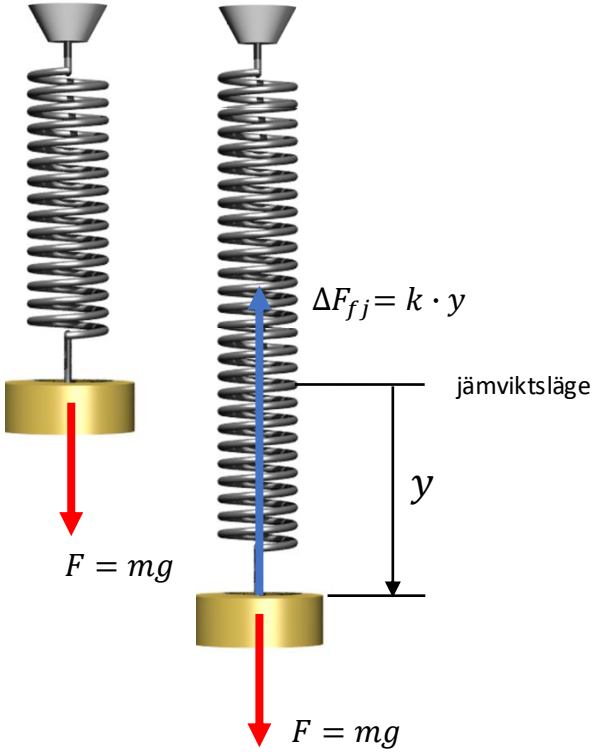
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

*) Observera att tyngdaccellerationen g inte påverkar egenfrekvensen. Den påverkar bara jämviktsläget i jämförelse mot om fjädern varit horisontell.

Elastisk energi

För att dra ut (eller pressa samman) en spiralfjäder krävs en energi proportionell mot utragningens längd i kvadrat. Energiändringen ligger lagrad i fjädern som en potentiell elastisk energi.

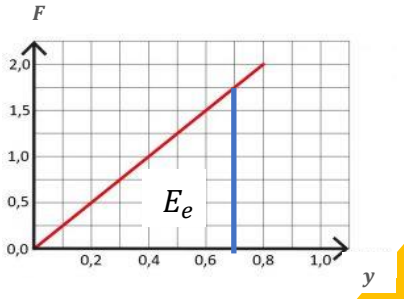


$$\Delta F_{fj} = k \cdot y$$

$$F_m = \frac{0 + \Delta F_{fj}}{2} = \frac{\Delta F_{fj}}{2}$$

$$E_e = F_m \cdot y = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y \cdot y$$

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2}$$



*) Den elastiska energin motsvarar arean i $F - y$ grafen och kan således även bestämmas med en integral.

$$E_e = \int dE_e = \int \Delta F_{fj} \cdot dy = \int k \cdot y \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2$$

Energiomvandling för en fjäder i harmonisk svängning

Totala energin $E = \frac{k \cdot y^2}{2} + \frac{m \cdot v^2}{2}$. Hastigheten är noll i ändlägena och maximal i jämviktsläget. I ändlägena är $y = A$ och energin kan således tecknas som $\frac{k \cdot A^2}{2}$.

