Direkta bevis och motexempel

Direkt bevis visar att ett påstående är sant.
Motexempel visar att ett påstående är falskt.

Direkta bevis måste oftast göras generella
med symboler som gäller i <u>alla</u> fall.

Som motexempel kan det ofta räcka med
ett sifferexempel som visar att endast
<u>ett</u> fall bevisar påståendet.

Jämnt kontra udda tal

Jämnt tal kan tecknas som $2k$, k heltal
udda tal kan tecknas som $2k+1$

<u>Produkter</u>:

jämnt · jämnt: $2k \cdot 2m = 2 \cdot 2km = 2n$

jämnt · udda: $2k \cdot (2m+1) = 2 \cdot (2km+k) = 2n$

udda · udda: $(2k+1)(2m+1) =$

$= 2 \cdot (2km + k + m) + 1 = 2n+1$

---

ex. Visa att om a och b är jämna tal,
är också a+b ett jämnt tal.

Direkt bevis:

$a = 2k$, $b = 2m$ $\Rightarrow$ $a+b = 2k+2m = 2(k+m) = 2n$

#

---

ex. Visa att om n är ett udda tal så är
n^2+4n+9 jämnt.

Direkt bevis:

$n = 2k+1$ $\Rightarrow$

$n^2+4n+9 = (2k+1)^2+4(2k+1)+9 =$

$= 4k^2+4k+1+8k+4+9 = 2\cdot(2k^2+6k+7) = 2m$

#

---

ex. Visa att om n är ett udda tal,
så är n^3 också udda.

Direkt bevis:

$n = 2k+1 \Rightarrow$

$$n^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 =$$
$$= 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1 = 2m + 1 \quad \#$$

---

ex. Visa att påståendet "x^3" är alltid större
än x" är falskt.

Motexempel:

om $x = 0{,}5 \Rightarrow x^3 = 0{,}5^3 = 0{,}125$ #

---

ex. Visa att $n^2+49 \geq 14n$ för alla n.

Direkt bevis:

$$n^2+49 \geq 14n \iff n^2-14n+49 \geq 0$$

$$n^2-14n+49 = (n-7)^2 \geq 0 \quad \#$$

(Ett kvadratiskt uttryck kan ej vara negativt.)

---

ex. Visa att $2n^3+3n^2+n$ är ett jämnt tal om n är ett heltal.

Direkt bevis:

Faktorisering ger: $2n^3+3n^2+n = n(n+1)(2n+1)$

Någon av faktorerna n och $n+1$ måste vara jämnt $\Rightarrow$ $n(n+1)$ är jämnt.
Följdaktligen måste också $n(n+1)(2n+1)$ vara jämnt. $\#$
