5106 Förenkla så långt som möjligt

a) $i^2 \cdot i$ b) $i^2 \cdot i^7$ c) $4i^3 \cdot 5i^{10}$

5106. a) $-1 \cdot i = \underline{-i}$

b) $i^9 = (i^2)^4 \cdot i = (-1)^8 \cdot i = \underline{i}$

c) $20\,i^{13} = 20\,(i^2)^6 \cdot i = 20 \cdot (-1)^6 \cdot i = \underline{20i}$

5107 Lös ekvationerna

a) $(x-8)^2 = -64$ b) $(x+11)^2 + 25 = 0$

5107. a) $x - 8 = \pm 8i$

$x = \underline{8 \pm 8i}$

b) $x + 11 = \pm 5i$

$x = \underline{-11 \pm 5i}$

5108 Visa genom prövning att $z = \pm 2i$ är rötter till ekvationen $z^5 = 16z$.

5108.

$z^5 - 16z = 0$

① $VL = (2i)^5 - 16 \cdot 2i = 32(-1)^4 \cdot i - 32i = 0 = HL$ #

5109 Uno har lärt sig att ett komplext tal är ett tal som kan skrivas i formen $a + bi$, där a och b är reella tal. Som lösning på två uppgifter har Uno fått $w = 5 - 8i$ och $z = 9$, men han tycker att varken w eller z verkar vara komplexa tal. Ingvar säger att de visst är komplexa tal.

a) Ge förslag på varför Uno inte tror att w och z är komplexa tal.

b) Hjälp Ingvar att förklara för Uno varför både w och z faktiskt är komplexa tal.

5109.

a) Imaginärdelen är negativ resp. noll.

b) Imaginärdelen kan vara både negativ resp. noll.

5110 Lös ekvationerna

a) $ai \cdot 5 = 20i$ b) $ai \cdot 8i = 24$

c) $ai \cdot ai = -16$ d) $5i \cdot (-8i) \cdot ai = -10i$

5110. a) $a = \underline{4}$ b) $a = \underline{-3}$

c) $a = \underline{\pm 4}$ d) $a = -\frac{1}{4}$

5111 Låt $z = i^n$.

a) Bestäm z för $n = 100$.

b) Bestäm z för $n = 243$.

c) Vilka olika värden kommer z att anta för $n = 1, 2, 3, \ldots$?

5111. a) $z = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$

b) $z = i^{100} \cdot i^{100} \cdot (i^2)^{21} \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot -1 \cdot i = -i$

c) $i, -1, -i, 1, i, -1, \ldots$

5112 Produkten av två rent imaginära tal är –20 och kvoten av talen är 0,8. Bestäm de två talen.

5112. $\begin{cases} xi \cdot yi = -20 \\ \frac{xi}{yi} = 0.8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 20 \\ \frac{x}{y} = 0.8 \end{cases} \Rightarrow$

$x \cdot \frac{x}{0.8} = 20 \Rightarrow x = \pm 4, \; y = \pm 5$

Talen är $(-4i$ och $-5i)$ eller $(4i$ och $5i)$

5113 Ange en lösning till ekvationerna

a) $ai = 64$ b) $bi \cdot bi \cdot 2bi = 54$

5113. a) $ai^2 = 64i$

$a = -64i$

b) $2b^3 = 54i$

$b^3 = 27\frac{i^3}{i^2} = -27i^3$

$b = -3i$

5124 Lös ekvationen $z + iz = i$.

(*Nationella provbanken MaE vt 1998*)

5124.

$$z + iz = i$$

$$z(1+i) = i$$

$$z = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \underline{\frac{1+i}{2}}$$

5125 Ge exempel på ett komplext tal z som uppfyller ö likheten $z + \bar{z} = 4$.

5125.

$$\underline{z = 2 + 3i}$$

5126 Lös ekvationerna

a) $2z + 14i = (3i - 5)(2 + 2i)$

b) $3z + \frac{4i}{2+i} = 1 - i$

5126.

a) $2z + 14i = 6i - 6 - 10 - 10i$

$$\underline{z = -8 - 9i}$$

b) $3z(2+i) + 4i = (1-i)(2+i)$

$$z = \frac{(1-i)(2+i) - 4i}{3(2+i)} = \frac{2 - i + 1 - 4i}{3(2+i)} =$$

$$= \frac{(3-5i)(2-i)}{15} = \frac{6 - 3i - 10i - 5}{15} = \underline{\frac{1 - 13i}{15}}$$

5127 Lös ekvationerna

a) $3\,\mathrm{Re}\,z - z = 4 + 10i$

b) $2\,\mathrm{Im}\,z - z = 5\,\mathrm{Re}\,(z+1)$

5127. a) $z = a+bi \Rightarrow$

$3a - (a+bi) = 4+10i$

$2a - bi = 4+10i$

$a = 2,\ b = -10 \Rightarrow z = \underline{2-10i}$

b) $z = a+bi \Rightarrow$

$2b - (a+bi) = 5(a+1)$

$2b - 6a - 5 - bi = 0$

$b = 0,\ a = -\frac{5}{6} \Rightarrow z = \underline{-\frac{5}{6}}$

5128 Visa att för alla komplexa tal z gäller att

a) $\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} \bar{z} = 0$

b) $\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} \bar{z} = 0$

c) $\bar{z} + z$ är ett reellt tal

5128. $z = a+bi$, $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$

a) $a - a = 0$

b) $b + (-b) = 0$

c) $a - bi + a + bi = a$ #

5129 Bestäm det komplexa tal z som uppfyller
$3z = 2\bar{z} - 3 + 2i$.

5129. $z = a+bi$ =>

$3(a+bi) = 2(a-bi) - 3 + 2i$

$3a + 3bi = 2a - 2bi - 3 + 2i$

$a + 5bi = -3 + 2i$

$a = -3$, $b = \frac{2}{5}$ => $z = -3 + \frac{2}{5}i$

5130 Visa att om $z^2 = \bar{z}^2$, så är antingen $\operatorname{Re} z = 0$ eller $\operatorname{Im} z = 0$.

5130. $z = a+bi$, $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$

$$z^2 - \bar{z}^2 = 0$$

$$(a+bi)^2 - (a-bi)^2 = 0$$

$$a^2 + 2abi - b^2 - a^2 + 2abi - b^2 = 0$$

$$4abi - 2b^2 = 0$$

$$2b(2ai - b) = 0$$

① : $2b = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} z = 0$

② : $2ai = b \Rightarrow \operatorname{Re} z = 0$

#

5131 Bestäm det reella talet x så att uttrycket $\frac{2}{2+xi} + \frac{x}{2-xi}$ blir ett rent imaginärt tal och ange detta tal.

5131.

$$\frac{2}{2+xi} + \frac{x}{2-xi} =$$

$$= \frac{2(2-xi) + x(2+xi)}{4+x^2} =$$

$$= \frac{4 - 2xi + 2x + x^2 i}{4+x^2}$$

Rent imaginärt tal $\Rightarrow 4+2x = 0 \Rightarrow \underline{x = -2}$

Talet blir $\frac{4+4i-4+4i}{4+4} = \frac{8i}{8} = \underline{i}$

5132 Låt $z = \dfrac{a+bi}{c+di}$ och visa att om $ad = bc$, så är z ett reellt tal.

5132.

$$z = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} =$$

$$= \frac{ac+(bc-ad)i+bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \quad \#$$

5133 Välj två komplexa tal z och w sådana att $\operatorname{Im} z \neq 0$ och $\operatorname{Im} w \neq 0$.

a) Visa att sambandet $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ gäller för de komplexa tal du valt.

b) Visa att sambandet $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ gäller för alla komplexa tal.

(Nationella provbanken MaE vt 1998)

5133. $z = a+bi$, $w = c+di$

b) $\overline{zw} - \bar{z} \cdot \bar{w} = 0 \Rightarrow$

$$\overline{(a+bi)(c+di)} - \overline{a+bi} \cdot \overline{c+di} =$$

$$= \overline{ac-bd+(ad+bc)i} - (a-bi)\cdot(c-di) =$$

$$= ac-bd-(ad+bc)i-(ac-bd-(ad+bc)i)$$

$$= ac-ac-bd+bd-(ad+bc)i+(ad+bc)i = 0$$

$\#$

5137 Bestäm först talet a så att ekvationen $x^2 - 8x + a = 0$ får roten $x_1 = 4 - 2i$.
Bestäm sedan ekvationens andra rot.

5137.

$$(4-2i)^2 - 8(4-2i) + a = 0$$

$$16 - 16i - 4 - 32 + 16i + a = 0$$

$$a = 20$$

$$x^2 - 8x + 20 = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16-20} = 4 \pm 2i$$

Den andra roten $x_2 = 4 + 2i$

5138 För vilka värden på a har ekvationen $x^2 + 6x + a = 0$

a) två reella rötter

b) en reell dubbelrot

c) två icke-reella rötter

5138. Diskriminanten = $9 - a$ (uttrycket under roten)

a) $9 - a > 0 \Rightarrow a < 9$

b) $9 - a = 0 \Rightarrow a = 9$

c) $9 - a < 0 \Rightarrow a > 9$

5139 För vilka värden på den reella koefficienten a har ekvationen $x^2 + ax + 10 = 0$

a) två reella rötter

b) en reell dubbelrot

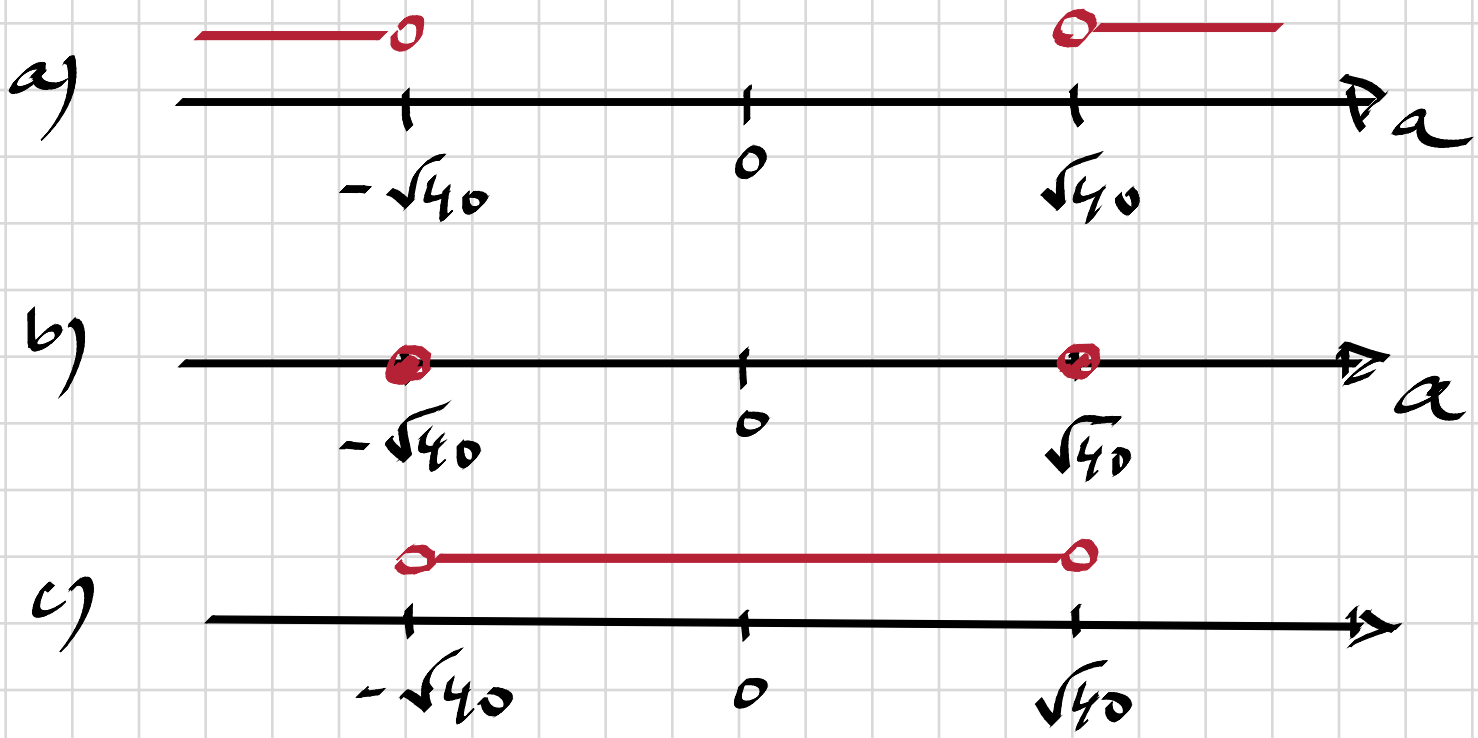
c) två icke-reella rötter

5139. Diskriminanten = $\frac{a^2}{4} - 10$

a) $\frac{a^2}{4} - 10 > 0 \Rightarrow a > \sqrt{40}\,,\ a < -\sqrt{40}$

b) $\frac{a^2}{4} - 10 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{40}$

c) $\frac{a^2}{4} - 10 < 0 \Rightarrow \sqrt{40} < a < -\sqrt{40}$



5140 Icke-reella rötter till andragradsekvationer med reella koefficienter består alltid av det som kallas *konjugerade par*. Det innebär att om $z_1 = a + bi$ är den ena roten, så är den andra roten $z_2 = a - bi$. Varför är det så? Motivera ditt svar.

5140. Diskriminanten är skild från noll => Vi får en $\pm i$-term.

5141 Ange en andragradsekvation med rötterna
ö $a \pm 7i$, där $a \neq 0$.

5141. $(x-a-7i)(x-a+7i) = 0$

$(x-a)^2+49 = 0$

$x^2-2ax+a^2+49 = 0$

5142 Summan av rötterna till en andragradsekvation är –4 och produkten är 13. Bestäm ekvationen.

5142.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = 13 \end{cases}$$

$$x_1 + \frac{13}{x_1} = -4$$

$$x^2 + 4x_1 + 13 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm 3i$$

$$(x + 2 - 3i)(x + 2 + 3i) = (x+2)^2 + 9 =$$

$$= x^2 + 4x + 13$$

Alt. lösning:

För ekv. $x^2 + px + q = 0$ gäller alltid att $x_1 + x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = q$

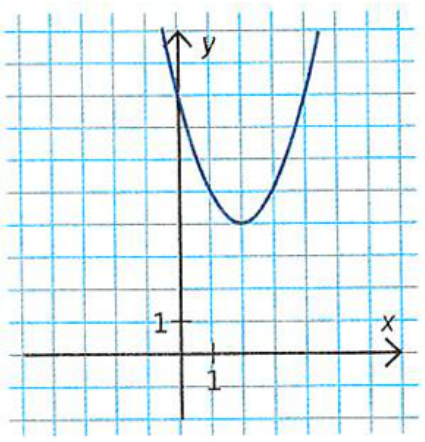
$$\Rightarrow \quad p = 4, \; q = 13 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 13$$

5143 Motivera varför $x = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$ ger rötterna till ekvationen $x^2 + px + q = 0$ när $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$.

5143.

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{-(b-a)} = i\cdot\sqrt{b-a} \quad \#$$

5144 Grafen visar en andragradsfunktion som saknar reella nollställen. Bestäm funktionens komplexa nollställen.



$$x^2 + px + q = 0$$

5144. Symmetrilinje: $x = 2 \Rightarrow p = -4$

$$x = 0 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow q = 8$$

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i$$

5145 Ekvationen $z^2 + az + b = 0$ där a och b är reella tal har en lösning $z = 12 - i$. Bestäm konstanterna a och b.

(*Np MaE ht 1996*)

5145. $z_1 = 12 - i \Rightarrow z_2 = \bar{z}_1 = 12 + i$

$(x - z_1)(x - z_2) = (x - 12 + i)(x - 12 - i) =$

$= (x-12)^2 + 1 = x^2 - 24x + 145 \Rightarrow$

$(a, b) = (-24, 145)$

5146 För vilka värden på den reella koefficienten a har ekvationen $x^2 + ax + a = 0$

a) två reella rötter

b) en reell dubbelrot

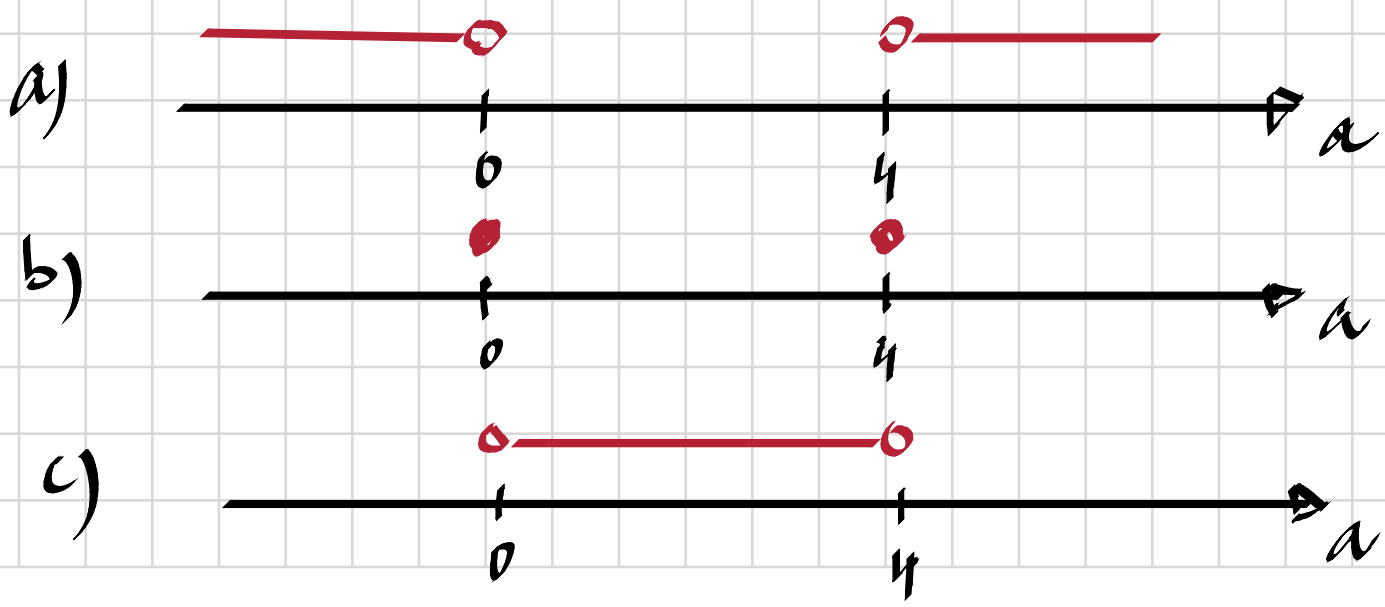
c) två icke-reella rötter

5146. Diskriminanten $= \frac{a^2}{4} - a = \frac{a}{4}(a-4)$

a) $\frac{a}{4}(a-4) > 0 \Rightarrow$ $a < 0$ eller $a > 4$

b) $\frac{a}{4}(a-4) = 0 \Rightarrow$ $a = 0$ eller $a = 4$

c) $\frac{a}{4}(a-4) < 0 \Rightarrow$ $0 < a < 4$



5154 En rot till ekvationerna är given inom parentes. Bestäm ekvationernas övriga rötter.

a) $x^3 - 2x^2 - 16x - 16 = 0 \quad (x = -2)$

b) $x^3 + 5x^2 + 4x - 10 = 0 \quad (x = 1)$

c) $x^3 + 12x^2 + 50x + 60 = 0 \quad (x = -2)$

5154.

a)

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 4x - 8 \\ \hline x+2 & x^3 - 2x^2 - 16x - 16 \\ -\,(x^3 + 2x^2) & \\ \hline & -4x^2 - 16x - 16 \\ -\,(-4x^2 - 8x) & \\ \hline & -8x - 16 \\ -\,(-8x - 16) & \\ \hline & 0 \end{array}$$

$x^2 - 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4+8} = 2 \pm \sqrt{12}$

b)

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 6x + 10 \\ \hline x-1 & x^3 + 5x^2 + 4x - 10 \\ -\,(x^3 - x^2) & \\ \hline & 6x^2 + 4x - 10 \\ -\,(6x^2 - 6x) & \\ \hline & 10x - 10 \\ -\,(10x - 10) & \\ \hline & 0 \end{array}$$

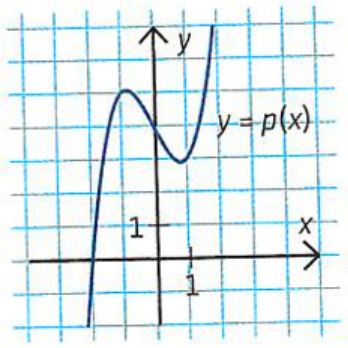
$x^2 + 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm i$

c)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+10x+30 \\
\hline
x+2 & x^3+12x^2+50x+60 \\
 & \underline{-\,x^3+2x^2} \\
 & \quad 10x^2+50x+60 \\
 & \quad \underline{-\,10x^2+20x} \\
 & \qquad 30x+60 \\
 & \qquad \underline{-\,30x+60} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$x^2+10x+30=0 \Rightarrow x=-5\pm\sqrt{25-30}=-5\pm i\sqrt{5}$

5155 Figuren visar grafen till $p(x) = x^3 - 2x + 4$.



a) Bestäm en rot $x = a$ till ekvationen $p(x) = 0$ med hjälp av grafen.

b) Skriv polynomet $p(x)$ som en produkt av faktorn $(x - a)$ och ett polynom $q(x)$.

c) Ange ett polynom $r(x)$ som har samma rötter som polynomet $p(x)$.

ö

5155. a) $x = -2$

b)
$$\begin{array}{r|l} x+2 & x^3-2x+4 \\ -\,(x^3+2x^2) & \\ \hline & -2x^2-2x+4 \\ -\,(-2x^2-4x) & \\ \hline & 2x+4 \\ -\,(2x+4) & \\ \hline & 0 \end{array}$$

$x^2 - 2x + 2$

$p(x) = (x+2)(x^2-2x+2)$

c) $r(x) = -p(x) = -x^3+2x-4$

5156 Visa att $x - 4$ är en faktor i polynomet
$p(x) = x^6 - 2x^5 - 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + x - 20$.

5156.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^5+2x^4+2x^3-2x^2+x+5 \\
\cline{2-2}
x-4 & x^6-2x^5-6x^4-10x^3+9x^2+x-20 \\
 & \underline{-\,x^6-4x^5} \\
 & \quad 2x^5-6x^4-10x^3+9x^2+x-20 \\
 & \quad \underline{-\,2x^5-8x^4} \\
 & \quad\quad -2x^4-10x^3+9x^2+x-20 \\
 & \quad\quad \underline{-\,-2x^4-8x^3} \\
 & \quad\quad\quad -2x^3+9x^2+x-20 \\
 & \quad\quad\quad \underline{-\,-2x^3+8x^2} \\
 & \quad\quad\quad\quad x^2+x-20 \\
 & \quad\quad\quad\quad \underline{-\,x^2-4x} \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad 5x-20 \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad \underline{-\,5x-20} \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

$\frac{p(x)}{x-4}$ har resten 0 $\Rightarrow$ $x-4$ är en faktor i polynomet #

5157 Ekvationerna har rötterna $x = 2$ och $x = 3$.
Bestäm övriga rötter.

a) $x^4 - 16x^3 + 49x^2 - 6x - 72 = 0$

b) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0$

5157.

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

a)

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 16x^3 + 49x^2 - 6x - 72 & x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-\,x^4 + 5x^3 - 6x^2} & x^2 - 11x - 12 \\
-11x^3 + 43x^2 - 6x - 72 & \\
\underline{+\,11x^3 - 55x^2 + 66x} & \\
-12x^2 + 60x - 72 & \\
\underline{+\,12x^2 - 60x + 72} & \\
0 &
\end{array}$$

$$x^2 - 11x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{48}{4}} = \frac{11 \pm 13}{2}$$

"övriga rötter": $x = -1$, $x = 12$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+1 \\
\cline{2-2}
x^2-5x+6 & x^4-4x^3+2x^2+x+6 \\
 & \underline{-\ x^4-5x^3+6x^2} \\
 & \quad x^3-4x^2+x+6 \\
 & \quad \underline{-\ x^3-5x^2+6x} \\
 & \qquad x^2-5x+6 \\
 & \qquad \underline{-\ x^2-5x+6} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{4}{4}}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

"övriga rötter": $x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

5158 I en matematikuppgift står det ”Visa att $x-5$ är en faktor i polynomet $p(x)=x^4-3x^3-14x^2+23x-15$.” Max löser uppgiften genom att visa att polynomdivisionen $\frac{p(x)}{x-5}$ går jämnt upp. My säger att hon kan lösa uppgiften på ett enklare sätt.

a) Visa att $x-5$ är faktor i $p(x)$ genom att finna ett polynom q sådant att $p(x)=(x-5)q(x)$, dvs. lös uppgiften på ett liknande sätt som Max gjort.

b) Hur kan My ha tänkt när hon säger att uppgiften kan lösas på ett enklare sätt?

5158.

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3+2x^2-4x+3 \\
\hline
x-5 & x^4-3x^3-14x^2+23x-15 \\
 - & x^4-5x^3 \\
\hline
 & 2x^3-14x^2+23x-15 \\
 - & 2x^3-10x^2 \\
\hline
 & -4x^2+23x-15 \\
 - & -4x^2+20x \\
\hline
 & 3x-15 \\
 & 3x-15 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\frac{p(x)}{x-5}$ har resten 0 $\Rightarrow$ $x-5$ ”är en faktor i polynomet. #

b) Om $x-5$ ”är en faktor $\Rightarrow p(5)=0$

$p(5)=5^4-3\cdot5^3-14\cdot5^2+23\cdot5-15=625-375-350+115-15=0$ #

5159 Bevisa del 2 av faktorsatsen, dvs. ”Om $p(x) = (x - a)q(x)$ för något polynom $q(x)$, så är $p(a) = 0$”.

5159. $p(a) = (a-a) \cdot q(a) = 0$ #

5160 Ekvationen $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 8 = 0$ har faktorn $x^2 + 1$. Lös ekvationen fullständigt.

5160. $x^2+1 = 0 \Rightarrow x_1 = i,\ x_2 = -i$

$(x^2+1)(x-x_3)(x-x_4) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 8$

$(x^3 - x_3x^2 + x - x_3)(x-x_4) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 8$

$x^4 - (x_3+x_4)x^3 + (x_3x_4+1)x^2 - (x_3+x_4)x + x_3x_4$

$x_{3,4} = a \pm bi$

$x_3 + x_4 = 4\ ,\ x_4 = \bar{x}_3 \Rightarrow a = 2$

$x_3x_4 = 8 \Rightarrow a^2 + b^2 = 8 \Rightarrow b = \pm 2$

$x_3 = 2 + 2i\ ,\ x_4 = 2 - 2i$

5161 Ekvationen $x^4 + 4x^3 + x^2 + 24x + 260 = 0$ har rötterna $x = 2 + 3i$ och $x = 2 - 3i$. Bestäm samtliga rötter till ekvationen.

5161.

$(x-2-3i)(x-2+3i) =$

$= x^2 - 2x + 3xi - 2x + 4 - 6i - 3xi + 6i + 9 =$

$= x^2 - 4x + 13$

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-4x+13 & x^4+4x^3+x^2+24x+260 \\
\cline{2-2}
 & x^2+8x+20 \\
 & -\,(x^4-4x^3+13x^2) \\
\cline{2-2}
 & 8x^3-12x^2+24x+260 \\
 & -\,(8x^3-32x^2+104x) \\
\cline{2-2}
 & 20x^2-80x+260 \\
 & -\,(20x^2-80x+260) \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$x^2 + 8x + 20 = 0 \Rightarrow x = -4 \pm \sqrt{16-20} = -4 \pm 2i$

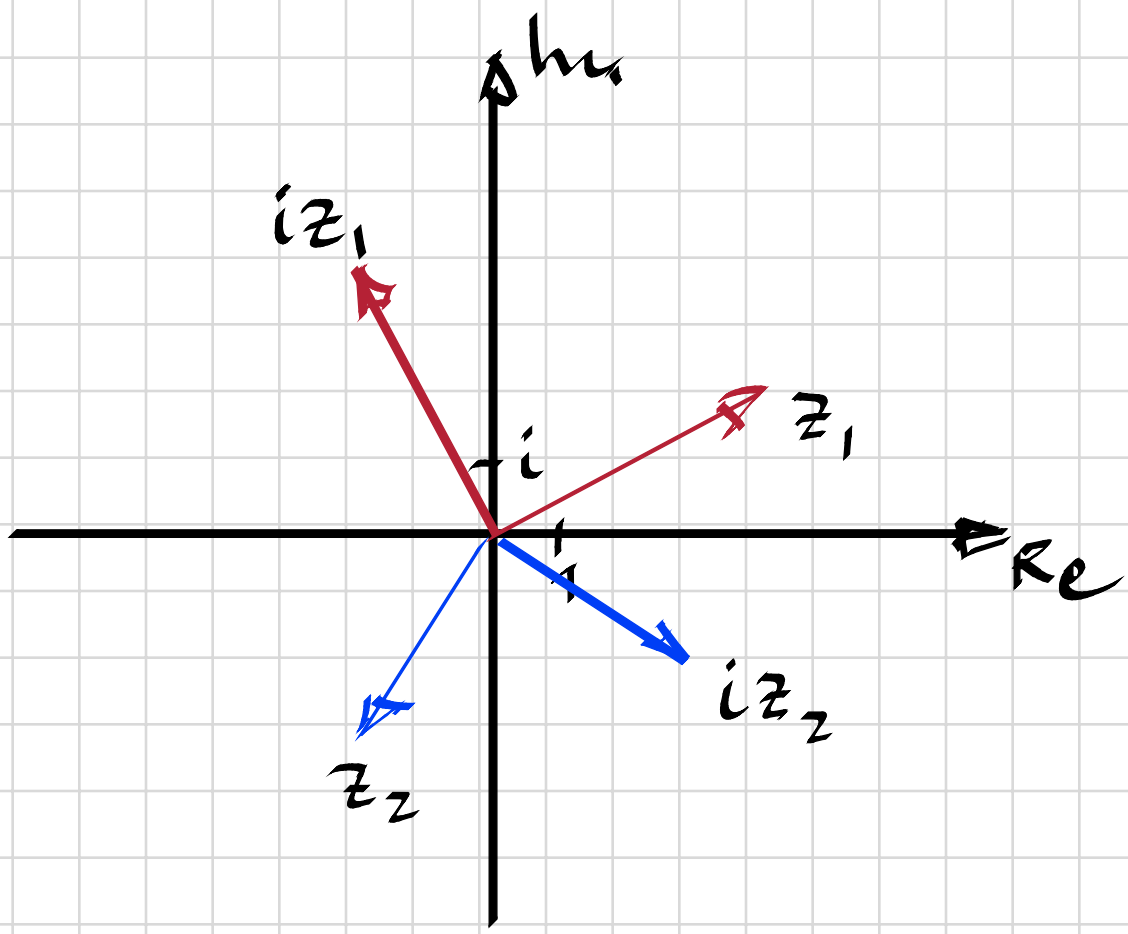
$x_1 = 2+3i,\ x_2 = 2-3i,\ x_3 = -4+2i,\ x_4 = -4-2i$

5209 a) Rita visarna till $z_1 = 4 + 2i$ och $z_2 = -2 - 3i$ samt talen $i \cdot z_1$ och $i \cdot z_2$ i det komplexa talplanet.

b) Hur förändras visaren till ett komplext tal när talet multipliceras med i?

5209. a) $iz_1 = i(4+2i) = -2+4i$

$iz_2 = i(-2-3i) = 3-2i$



b) Multiplikation med i motsvarar $90°$ graders vridning medurs.

5210 Markera i det komplexa talplanet de tal z för vilka

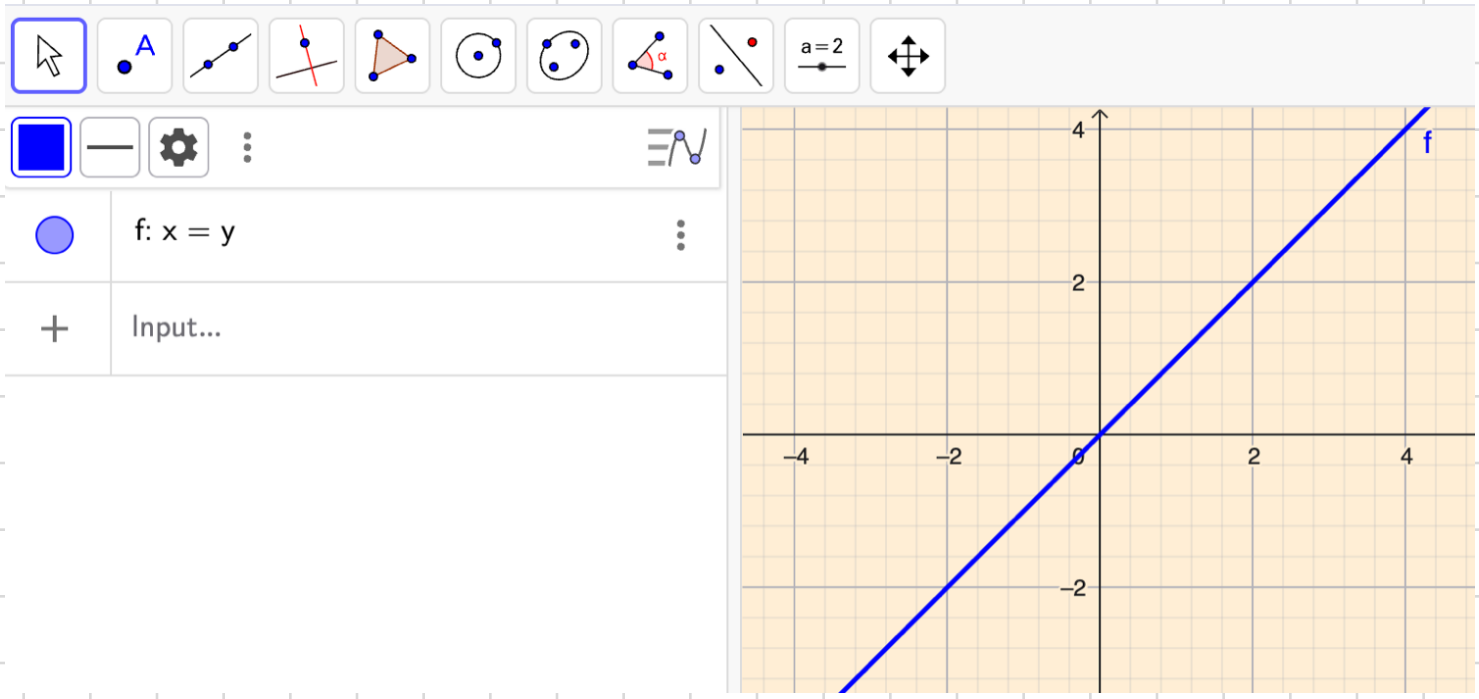
a) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

b) $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$

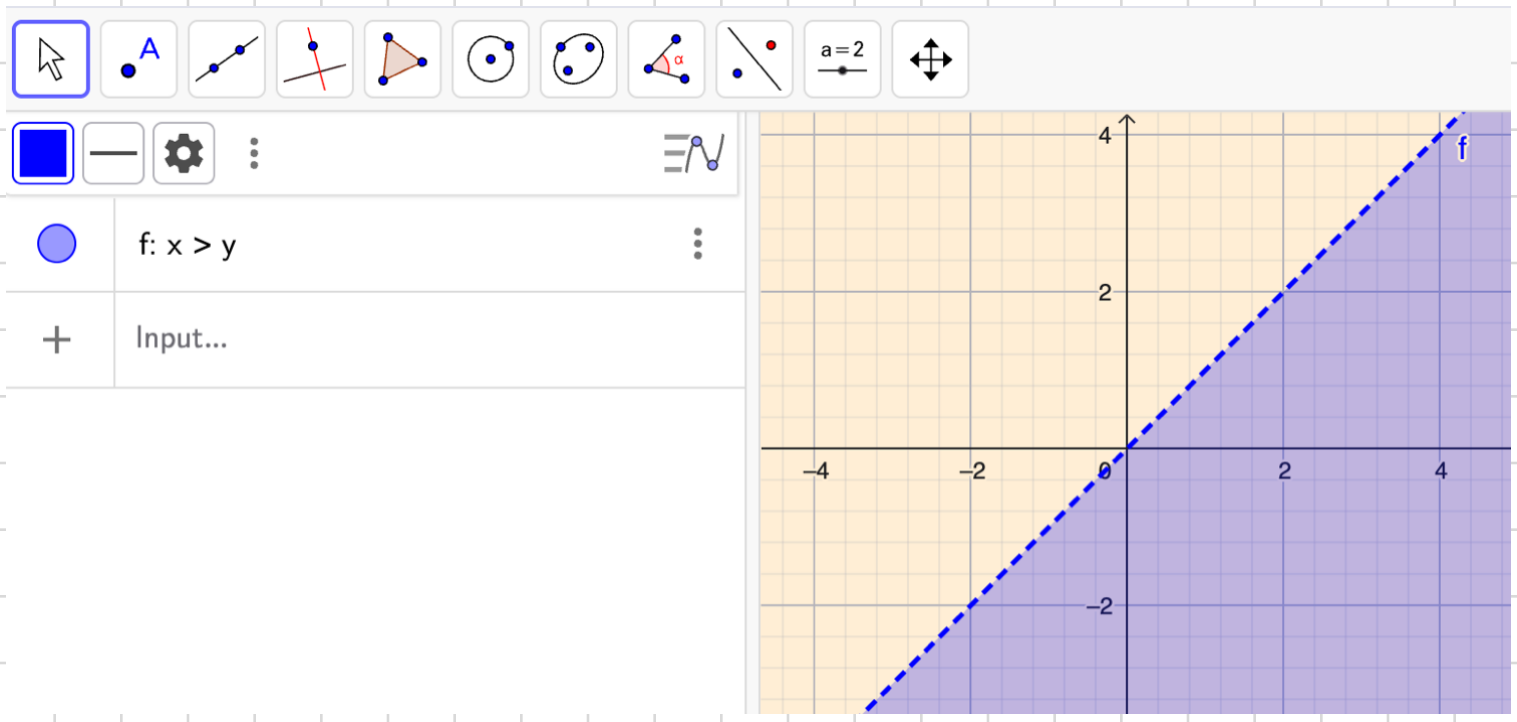
c) $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z + 2$

5210.

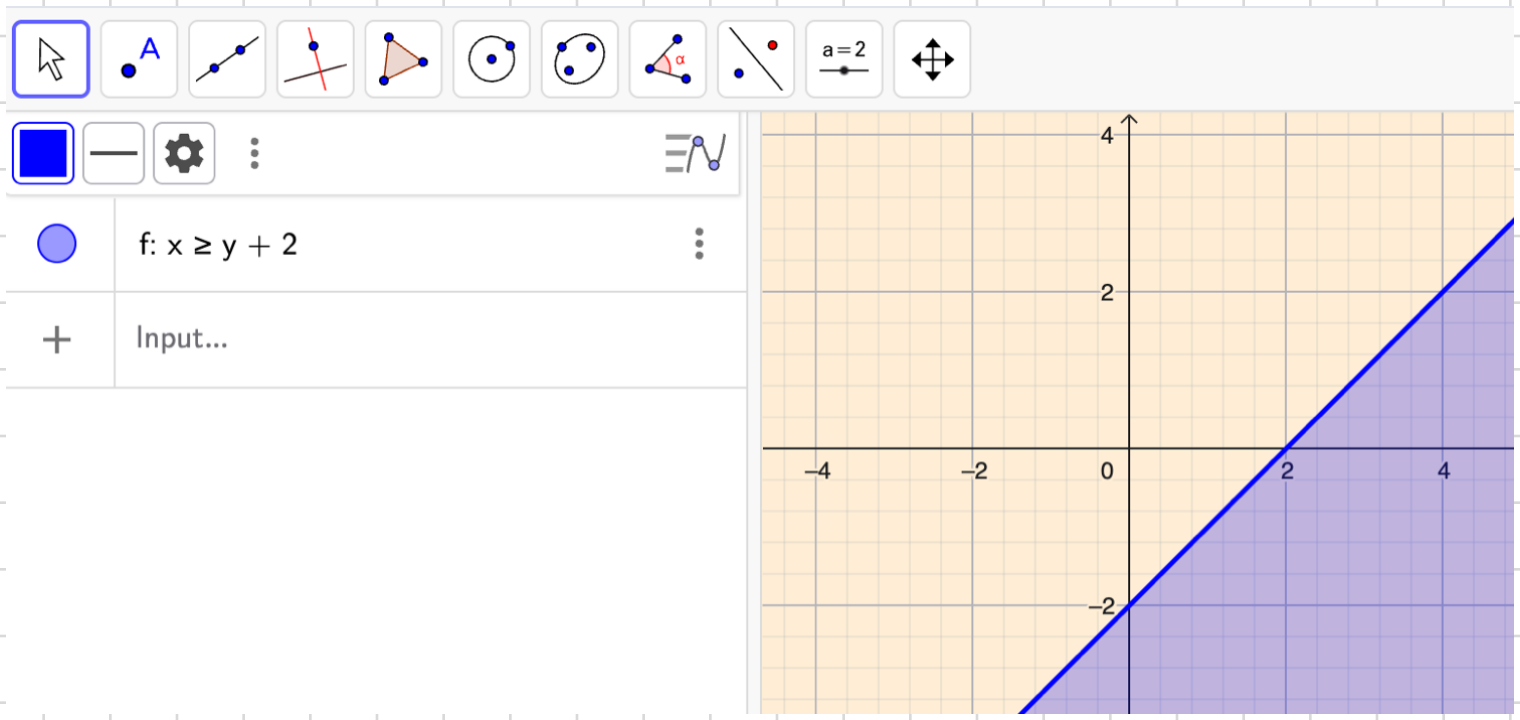
a)



b)

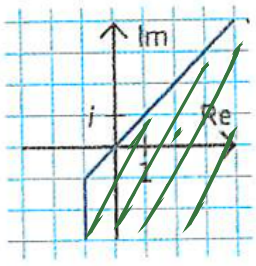


c)

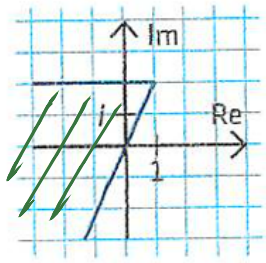


5211 Vilka tal z är markerade i figuren?

a)



b)



5211. a) $\begin{cases} \mathrm{Re}\, z \geq -1 \\ \mathrm{Re}\, z \geq \mathrm{Im}\, z \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathrm{Re}\, z \leq \frac{1}{2} \mathrm{Im}\, z \\ \mathrm{Im}\, z \leq 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\, z < \mathrm{Im}\, z \leq 2$

5217 Ange talen i polär form, med argumentet i radianer.

a) $-4-4i$ b) $2\sqrt{3}-6i$ c) $2i-2$

5217.

a) $z = re^{i\theta} = 4\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

b) $r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\theta = -\arctan\frac{6}{2\sqrt{3}} = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

$z = re^{i\theta} = 4\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{3}\left(i\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right)$

c) $z = re^{i\theta} = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

5218 Visa att $|z| = |\bar{z}|$ för alla komplexa tal z.

5218. Låt $z = a+bi$

$HL = |\bar{z}| = |a-bi| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z| = VL$ #

5219 Låt $z = a + 5i$ och $|z| = 6$.

a) Bestäm a b) Bestäm $\arg z$

5219.

a) $a^2 + 5^2 = 6^2$

$a^2 = 36 - 25 = 11 \Rightarrow a = \pm\sqrt{11}$

b) $a = +\sqrt{11} \Rightarrow \arg z = \arctan \frac{5}{\sqrt{11}} = 56°$

$a = -\sqrt{11} \Rightarrow \arg z = 180° - \arctan \frac{5}{\sqrt{11}} = 124°$

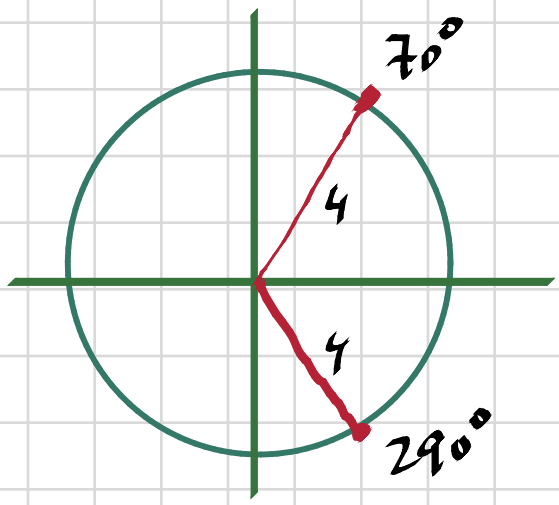
5220 Skriv talen i formen $r(\cos v + i \sin v)$, $r > 0$

a) $z = 4(\cos 70° - i \sin 70°)$

b) $w = -2(\cos 105° + i \sin 105°)$

5220.

a)

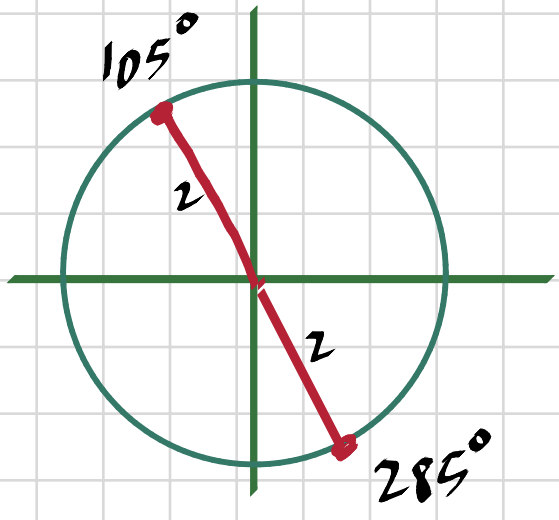


$\cos 70° = \cos 290°$

$-\sin 70° = +\sin 290°$ $\Rightarrow$

$z = 4(\cos 290° + i \sin 290°)$

b)



$-\cos 105° = +\cos 285°$

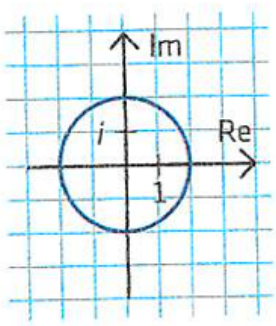
$-\sin 105° = +\sin 285°$ $\Rightarrow$

$z = 2(\cos 285° + i \sin 285°)$

5221 I figuren har vi markerat de tal z för vilka $|z| = 2$. Markera på samma sätt de tal z för vilka

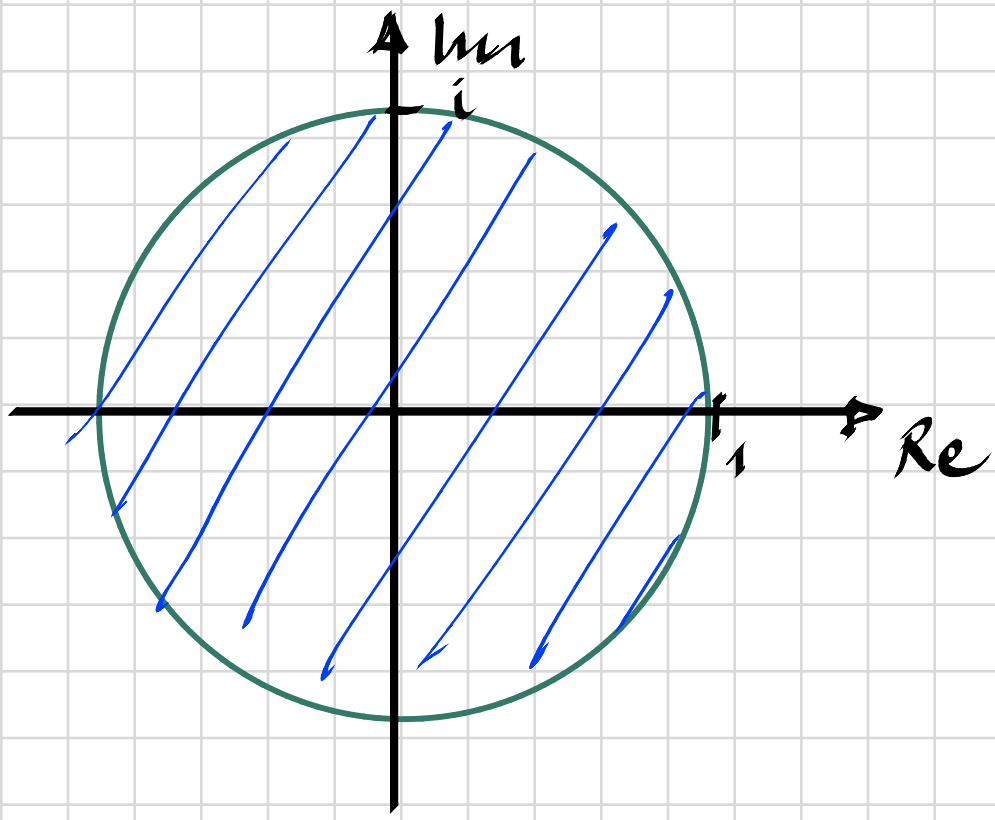
a) $|z| \leq 1$

b) $|z - i| = \frac{3}{2}$

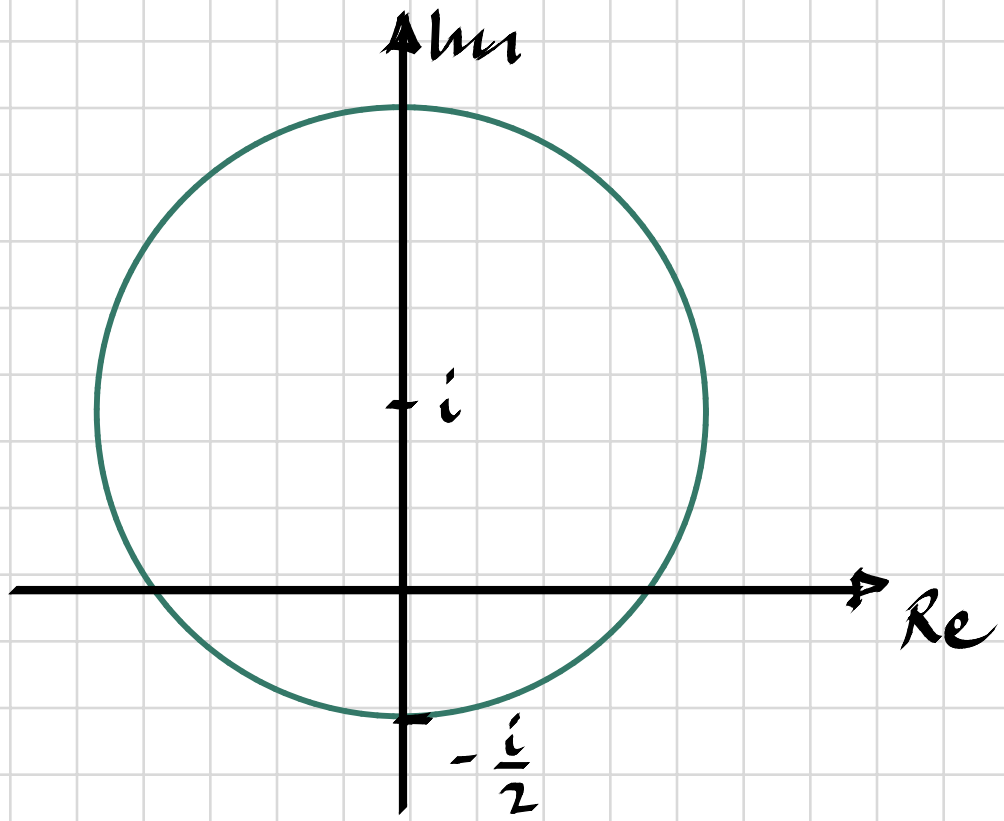


5221.

a)

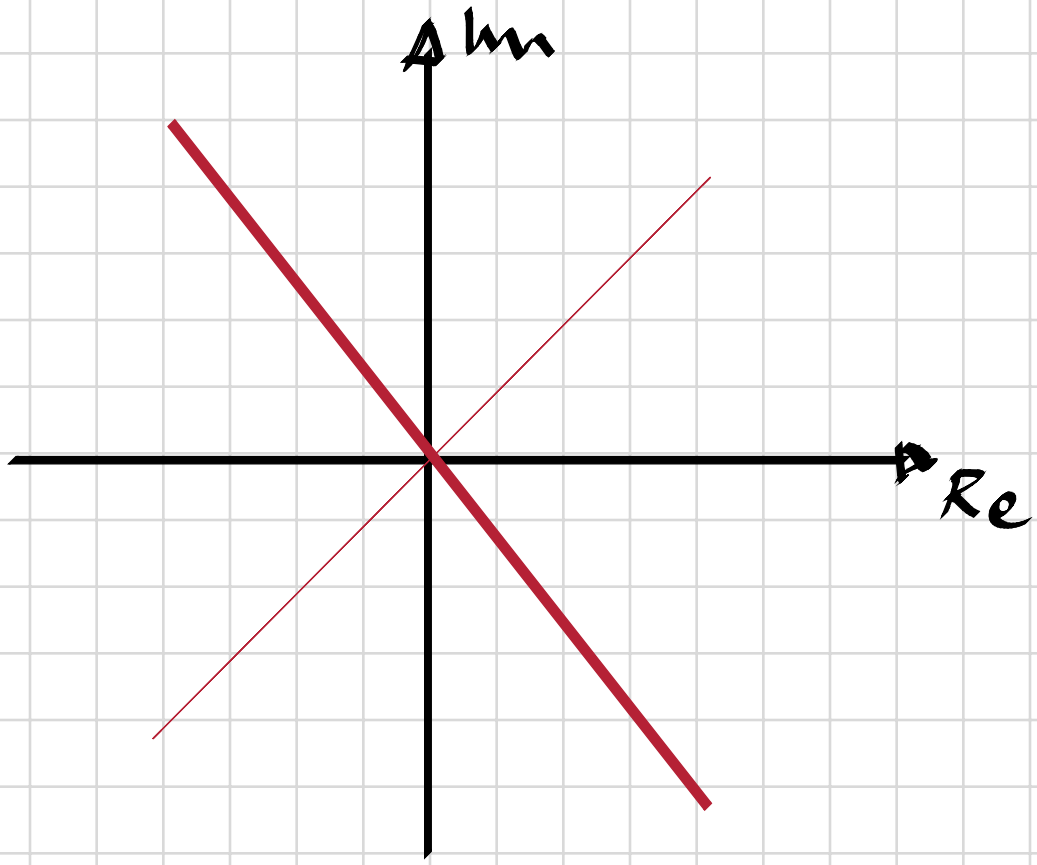


b)



5222 Markera i det komplexa talplanet de tal z för vilka $|\text{Re } z| = |\text{Im } z|$

5222.



5223 Visa att $|zw| = |z| \cdot |w|$ för alla komplexa tal z och w.

5223. Låt $z = a+bi$ och $w = c+di$

$$VL = |zw| = |(a+bi)(c+di)| = |ac-bd+(ad+bc)i|$$

$$= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} =$$

$$= \sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = |z| \cdot |w| = HL \quad \#$$

5228 Vilka är talen z och w, om
$zw = 24(\cos 110° + i \sin 110°)$ och
$\frac{z}{w} = 24(\cos 100° + i \sin 100°)$?

5228.

$$\begin{cases} zw = 24\,e^{i\cdot 110°} \\ \frac{z}{w} = 24\,e^{i\cdot 100°} \end{cases} \Rightarrow$$

$\div$

$$\frac{zw}{\frac{z}{w}} = w^2 = \frac{24\,e^{i\cdot 110°}}{24\,e^{i\cdot 100°}} = e^{i\cdot 10°} \Rightarrow w = e^{i\cdot 5°} = \underline{\cos 5° + i \sin 5°}$$

$$z = 24\,e^{i\cdot 100°}\cdot e^{i\cdot 5°} = 24\,e^{i\cdot 105°} = \underline{24(\cos 105° + i\cdot \sin 105°)}$$

5229 Talet z_1 har absolutbeloppet 5 och argumentet $\frac{\pi}{6}$. Talet z_2 har absolutbeloppet 2 och argumentet $\frac{\pi}{3}$. Bestäm

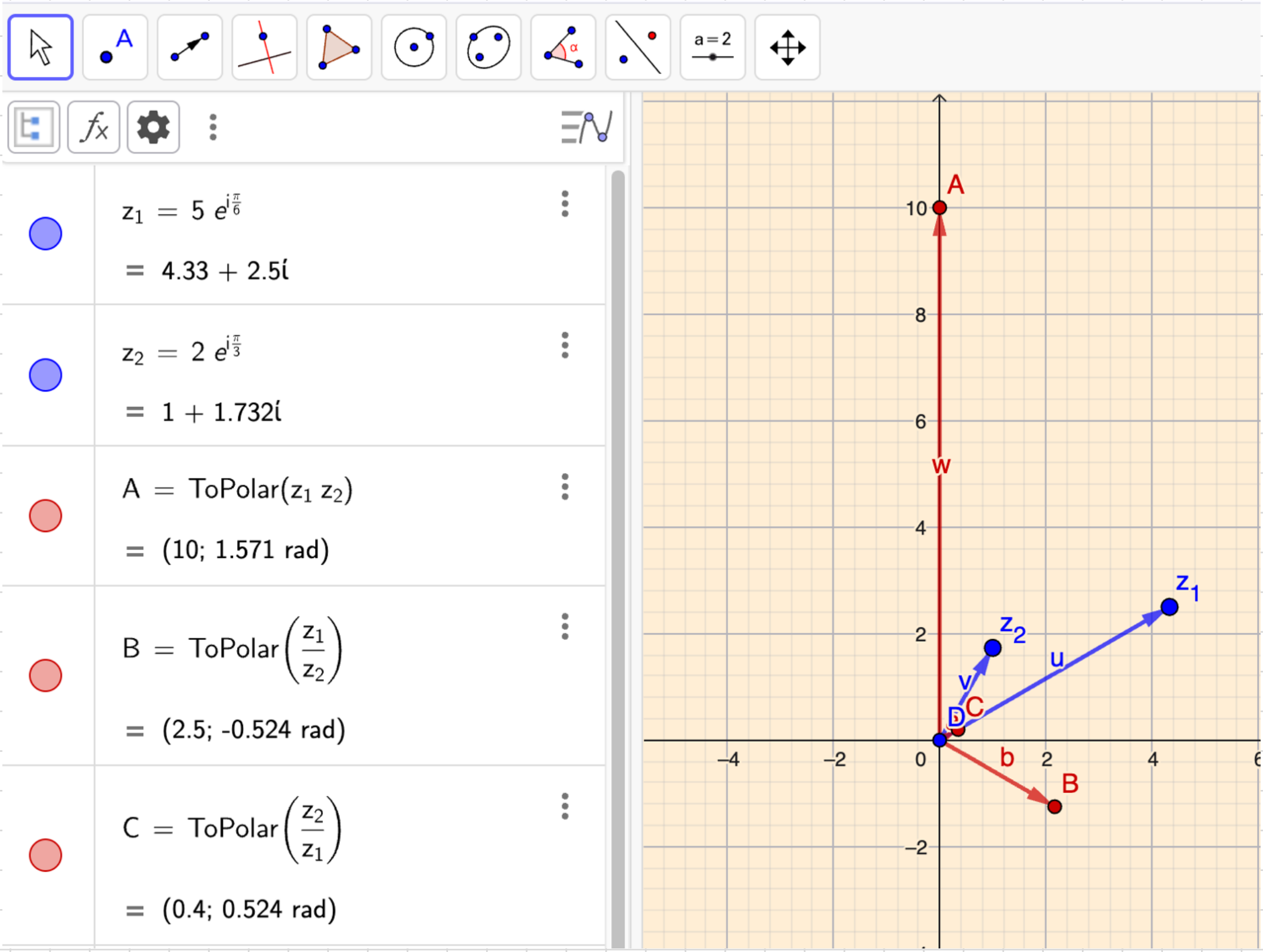
a) $z_1 z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$ c) $\frac{z_2}{z_1}$

5229.

a) $z_1 z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 10e^{i\frac{\pi}{2}} = 10\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \underline{10i}$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{5}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{5}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}} = \underline{\frac{5}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}$

c) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{5}e^{i\frac{\pi}{6}} = \underline{\frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$



5230 Lotta utför en multiplikation av två komplexa tal och får produkten $z = \sqrt{5}(\cos 35° + i \sin 45°)$. Klara säger att Lottas resultat är felaktigt. Har Klara rätt och hur har hon i så fall resonerat?

5230. Klara har rätt, z representerar en vektor i det komplexa talplanet och den kan bara ha en vinkel.

5231 Lös följande ekvationer

a) $3z(\cos 40° + i \sin 40°) =$
$= 27(\cos 190° + i \sin 190°)$

b) $\dfrac{4(\cos 250° + i \sin 250°)}{z} =$
$= 12(\cos 70° + i \sin 70°)$

5231.

a) $3z \cdot e^{i \cdot 40°} = 27 \cdot e^{i 190°} \Rightarrow$

$z = \frac{27}{3} \cdot \frac{e^{i 190°}}{e^{i \cdot 40°}} = 9e^{i \cdot 150°} = 9(\cos 150° + i \cdot \sin 150°)$

b) $\frac{4e^{i \cdot 250°}}{z} = 12e^{i \cdot 70°} \Rightarrow$

$z = \frac{4}{12} \cdot \frac{e^{i \cdot 250°}}{e^{i 70°}} = \frac{1}{3} e^{i \cdot 180°} = \frac{1}{3}(\cos 180° + i \sin 180° = -\frac{1}{3}$

5232 Låt $z = a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ och $w = b(\cos\beta + i\sin\beta)$.

a) Visa att $zw = ab(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$.

b) Visa att $\frac{z}{w} = \frac{a}{b}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta))$.

5232.

$$z = ae^{i\alpha}, \quad w = be^{i\beta}$$

a) $$zw = ae^{i\alpha}\cdot be^{i\beta} = abe^{i(\alpha+\beta)} = ab(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))$$

b) $$\frac{z}{w} = \frac{ae^{i\alpha}}{be^{i\beta}} = \frac{a}{b}e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{a}{b}(\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta))$$

#

5237 Beräkna z^9 och ange resultatet i formen $a + bi$.

a) $z = 4(\cos 20° + i\sin 20°)$

b) $z = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

5237.

a) $$z^9 = (4e^{i\cdot 20°})^9 = 262144(\cos 180° + i\sin 180°) = -262144$$

b) $$z^9 = (e^{i\frac{\pi}{12}})^9 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

5238 Bestäm absolutbelopp och argument för $(\sqrt{3} + i)^5$. Ange argumentet i radianer.

5238.

$$z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow$$

$$|z^5| = 2^5 = \underline{32}$$

$$\arg z^5 = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \underline{\frac{5\pi}{6}}$$

5239 Betrakta talet $z = \sqrt{3} - i$.

a) Skriv z i polär form.

b) Skriv z^{11} i polär form.

5239.

a) $z = 2e^{-i\cdot\frac{\pi}{6}} = \underline{2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}$

b) $z^{11} = 2^{11} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}\cdot 11} = \underline{2048\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

5240 Du har talet $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

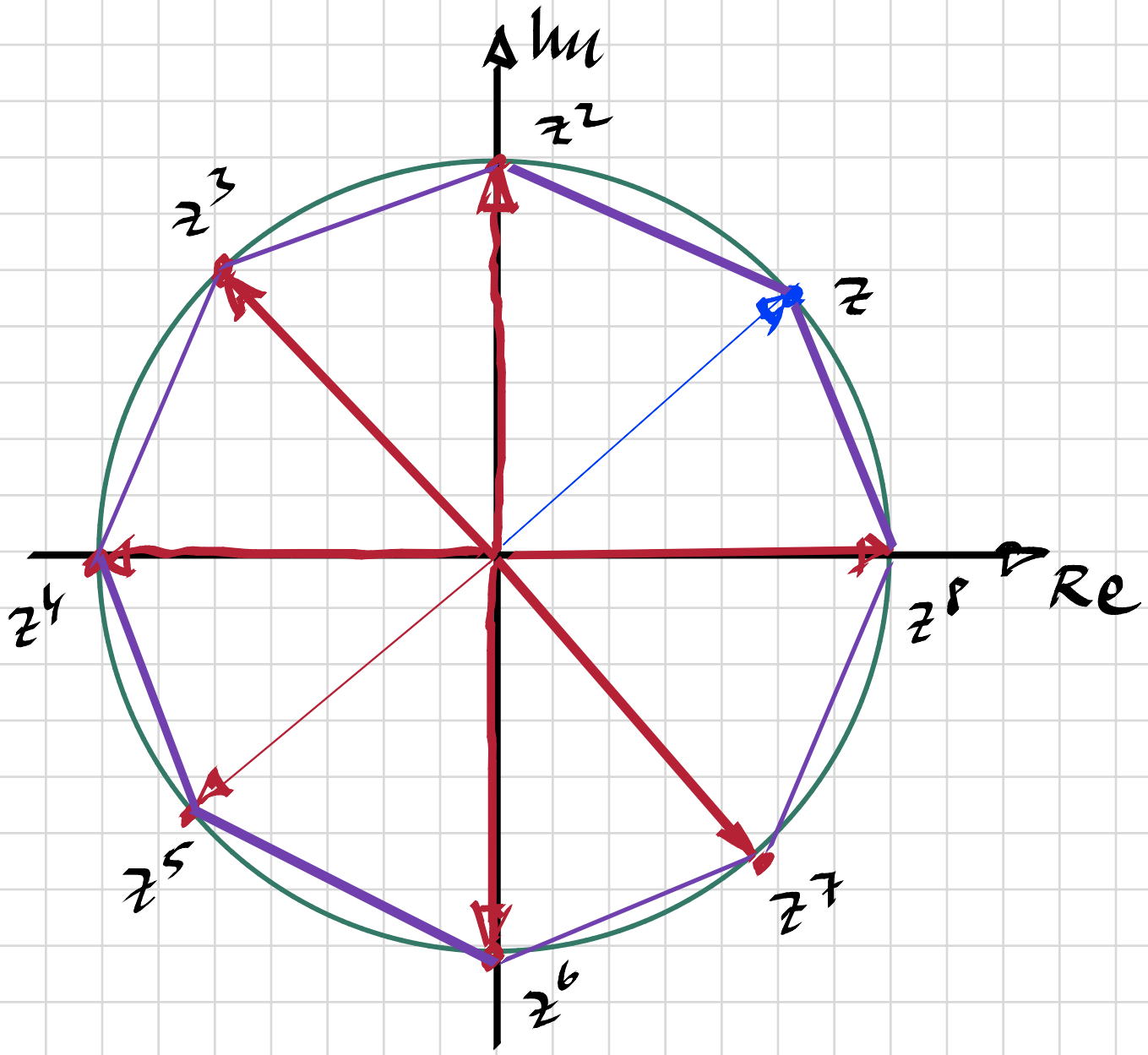
a) Markera talen $z^2, z^3, \ldots, z^8$ i det komplexa talplanet.

b) Vilken figur bildas om du sammanbinder punkterna?

5240. $z = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$

a)

$z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z^3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z^4 = e^{i\pi}$, $z^5 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z^6 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $z^7 = e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}$, $z^8 = e^{i2\pi}$



b) En oktogon

5241 Beräkna z^{100} för $z = i - 1$ och ange resultatet i formen $a + bi$.

5241.

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$z^{100} = 2^{50} e^{i\frac{300\pi}{4}} = 2^{50} \cdot e^{i(37\cdot 2\pi + \pi)} = 2^{50} e^{i\pi} = \underline{-2^{50}}$$

5242 Bestäm ett tal z i polär form så att z^8 är ett reellt tal.

5242.

$$z = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}$$

5243 Bevisa att $z^n = r^n(\cos nv + i \sin nv)$ för $z = r(\cos v + i \sin v)$ enligt regelrutan på sidan 193. Du får använda de Moivres formel som motivering i ditt bevis.

5243.

Enlig Eulers formel kan

$z = r(\cos v + i \sin v)$ skrivas $z = re^{iv}$

Enligt vanliga potensregler fås

$z^n = r^n e^{inv} = r^n(\cos nv + i \sin nv)$ #

5244 Moira och Ibrahim studerar aritmetik med komplexa tal. Moira säger att hon inte förstår hur $(\cos v + i \sin v)^n$ kan vara lika med $\cos nv + i \sin nv$. Det är ju en potens i första uttrycket och en produkt i det andra.

a) Hjälp Ibrahim att förklara för Moira varför uttrycken är lika.

b) Vad kallas sambandet som Moira vill ha förklarat?

5244.

a) $(\cos v + i\sin v)^n = (e^{iv})^n = e^{inv} = \cos nv + i\sin nv$

b) Sambandet kallas de Moivres formel men är en direkt konsekvens av Eulers formel. De Moivre presenterade dock sin formel ca 40 år innan Euler.

5245 För vilka värden på m gäller att z^m är ett reellt tal om

$$z = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

5245.

Låt $z^m = \left(\frac{3}{2}\right)^m \cdot e^{i\cdot\pi k} \Rightarrow z = \frac{3}{2} e^{i\cdot\frac{\pi k}{m}} = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi k}{m} + i\sin\frac{\pi k}{m}\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{\pi k}{m} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow m = \frac{3k}{4}, \quad k = 0, 4, 8, \ldots$

Låt $n = 4k \Rightarrow m = 3n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

5246 Låt $z = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$.

a) Vilket är det minsta positiva värdet på m, som gör att $z^m = z$ om $m \neq 1$.

b) Ange ett uttryck för de värden på m som gör att $z^m = z$.

5246.

a) $e^{i\cdot\frac{7\pi}{6}} = e^{i(\frac{7\pi}{6}m + k\cdot 2\pi)}$ $\Rightarrow$

$\frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}m + k\cdot 2\pi$

$\frac{7\pi}{6}(m-1) = -2\pi k$

$m = 1 - \frac{12k}{7}$, $k = 0, -7, -14, \ldots$

$n = -7k \Rightarrow$ $m = 1 + 12n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$m \neq 1 \Rightarrow m_{min} = m(n=1) = \underline{13}$

b) $m = 1 + 12n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

5256 Visa att ekvationen $z^4 = 1$ har lösningarna

$z_k = \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

där $k = 0, 1, 2, 3$.

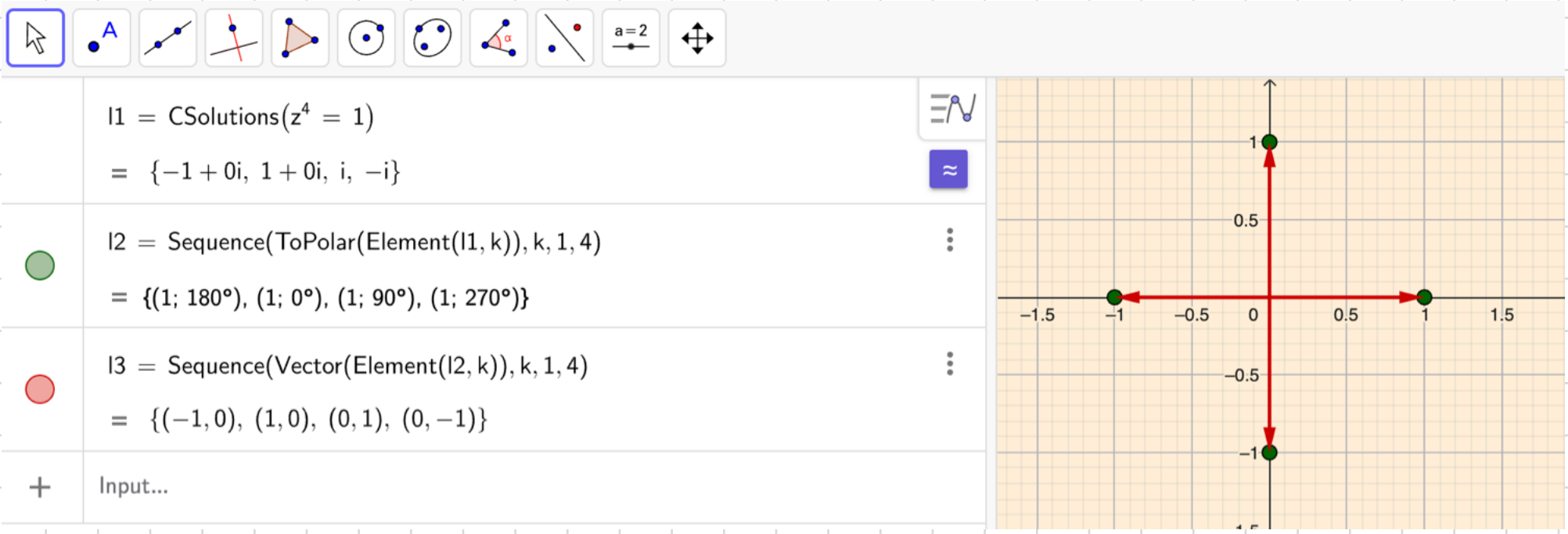
5256.

$z_0 = \cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1 \Rightarrow z_0^4 = 1^4 = 1$

$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i \Rightarrow z_1^4 = i^4 = 1$

$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1 \Rightarrow z_2^4 = (-1)^4 = 1$

$z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2} = 0 + i \cdot (-1) = -i \Rightarrow z_3^4 = (-i)^4 = 1$



5257 Lös ekvationen $z^2 = 7 - 24i$

5257.

$$z^2 = re^{i(\theta + k\cdot 2\pi)}$$

$$r = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

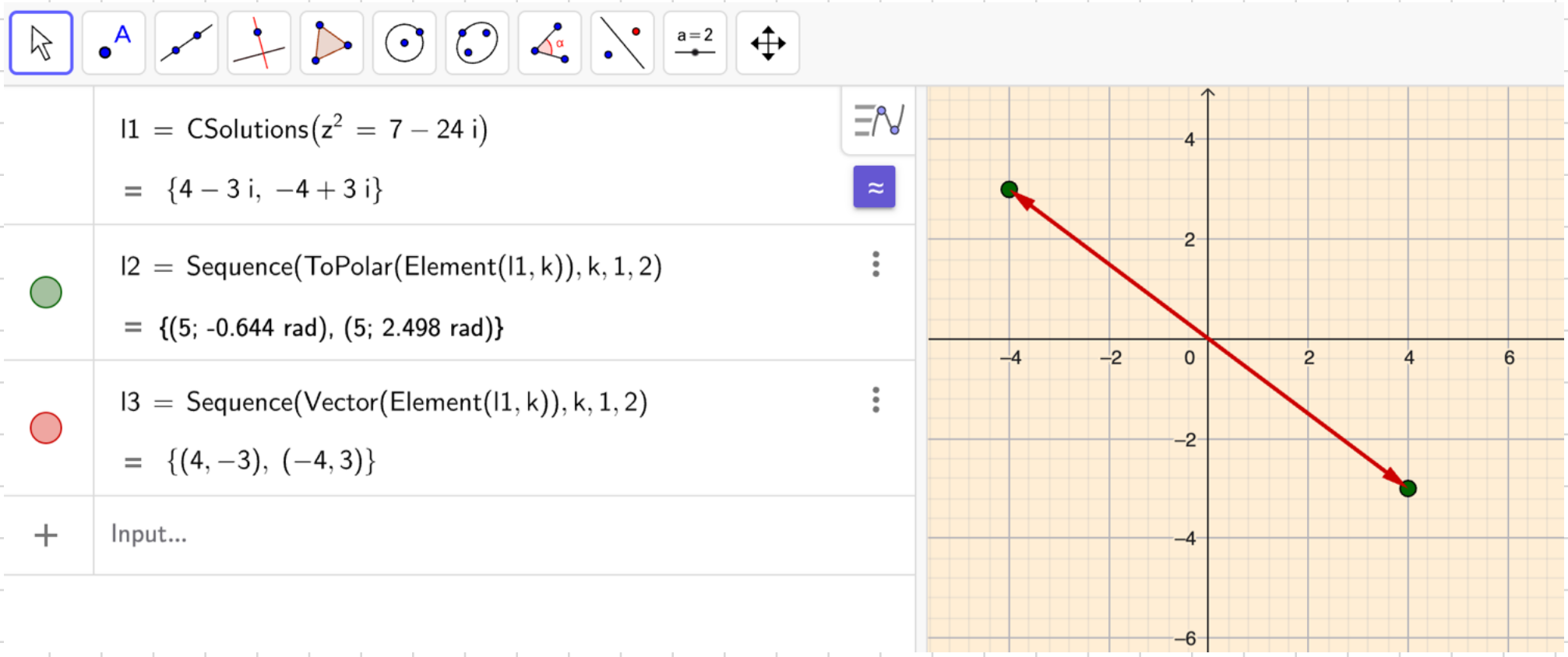
$$\theta = -\arctan\frac{24}{7} = -74°$$

$$z^2 = 25e^{i(-74 + k\cdot 360°)} \Rightarrow$$

$$z = 5e^{i(-37° + k\cdot 180°)}, \quad k = 0, 1$$

$$z_0 = 5e^{-i\,37°} = 4 - 3i$$

$$z_1 = 5e^{i\cdot 143°} = -4 + 3i$$



5258 Lös ekvationen $z^3 = 5 - 5i$

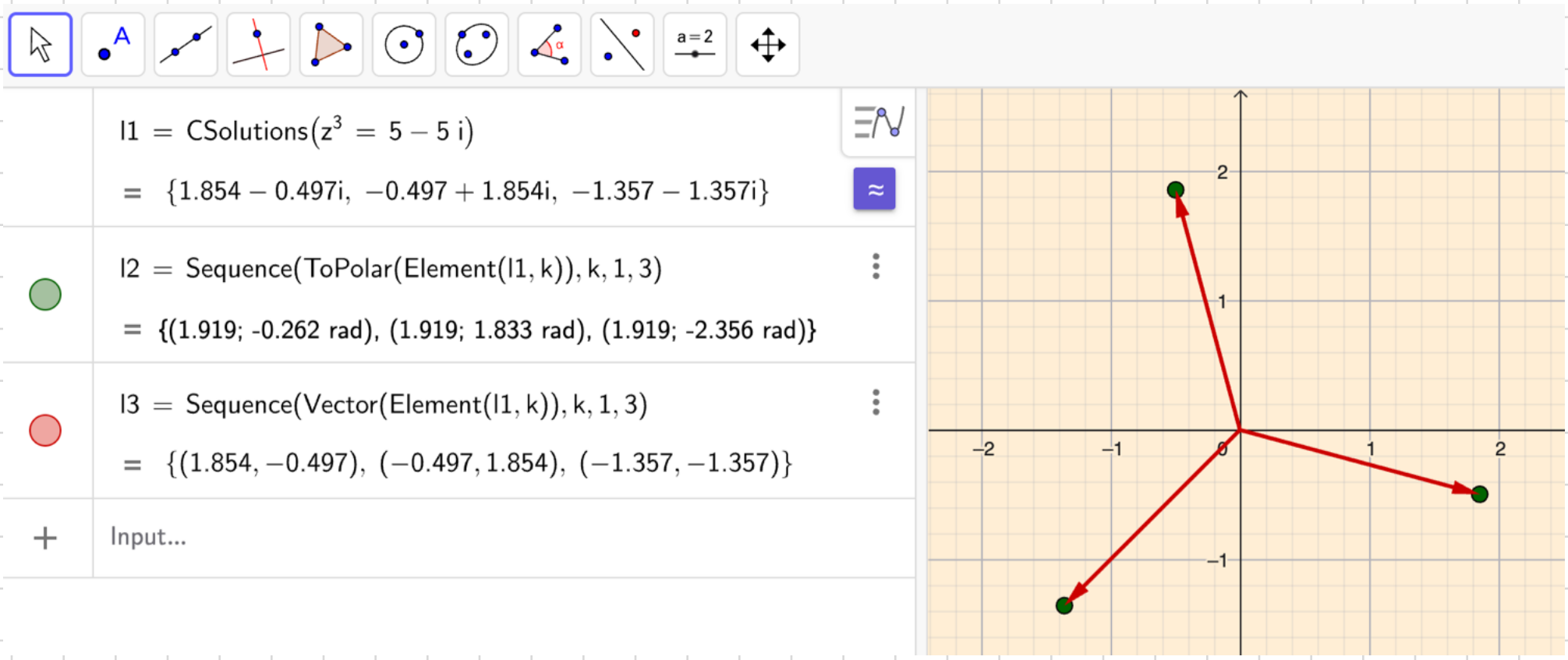
5258 $z^3 = 50^{\frac{1}{2}} e^{-i(\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi)}$ =>

$z = 50^{\frac{1}{6}} e^{i(-\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3})} = 1.92\, e^{i(\frac{8k\pi - \pi}{12})}$

$z_0 = 1.92\, e^{-\frac{\pi}{12}}$

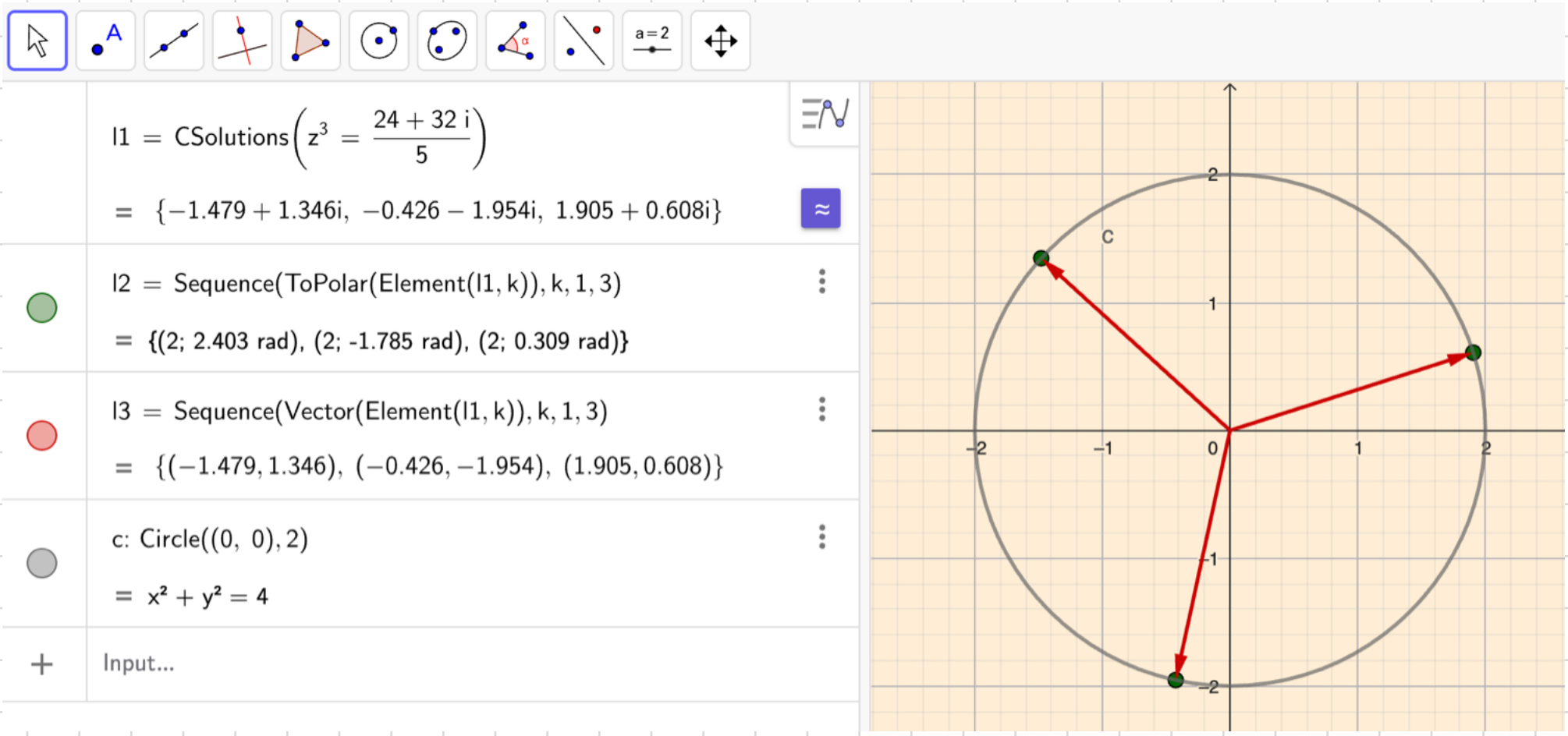
$z_1 = 1.92\, e^{\frac{3\pi}{4}}$

$z_2 = 1.92\, e^{\frac{5\pi}{4}}$



5259 Konstruera en uppgift som kan lösas genom att man bestämmer rötter ur ett komplext tal. Resultatet ska bestå av tre komplexa tal som befinner sig på en cirkel med radien 2.

5259. $z^3 = \dfrac{24+32i}{5}$



5260 Leopold och Kate har löst ekvationen $z^6 = 1$.
Leopold har svarat $z_k = \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right)$ för $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Kate har svarat $z_k = \cos k \cdot \frac{\pi}{3} + i \sin k \cdot \frac{\pi}{3}$ för $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Vem har rätt och varför?

5260. Båda har rätt.
Leopold ger de reella lösningarna i 0 och π, medan Kate ger dem i 2π och π vilket är samma sak.

5261 Bestäm samtliga rötter till ekvationerna

a) $x^3 - 1 = 0$ b) $2x^6 - 128 = 0$

5261.

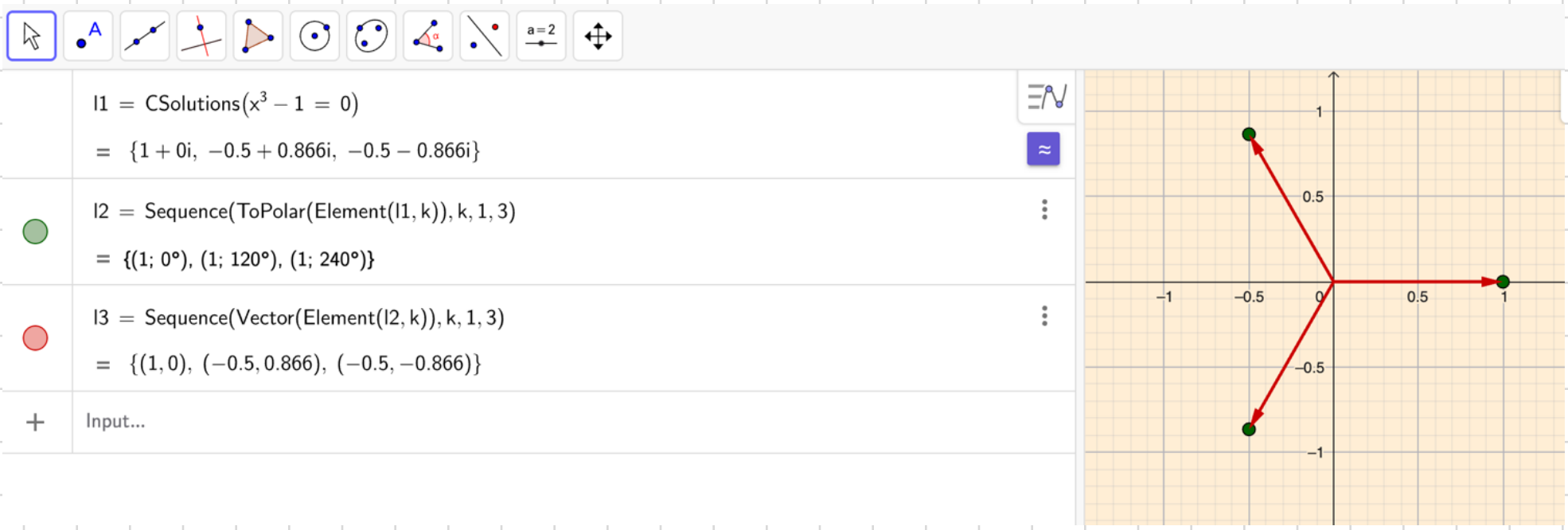
a) $x^3 = 1 = e^{i \cdot 2\pi k}$, $k = 0, 1, 2$

$x = e^{i\frac{2\pi}{3}k}$ =>

$x_0 = 1$

$x_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



b) $x^6 = 64 = 64e^{i\cdot 2\pi k}$, $k = 0,1,2,3,4,5$

$x = 2e^{i\frac{\pi}{3}k}$ ->

$x_0 = 2$

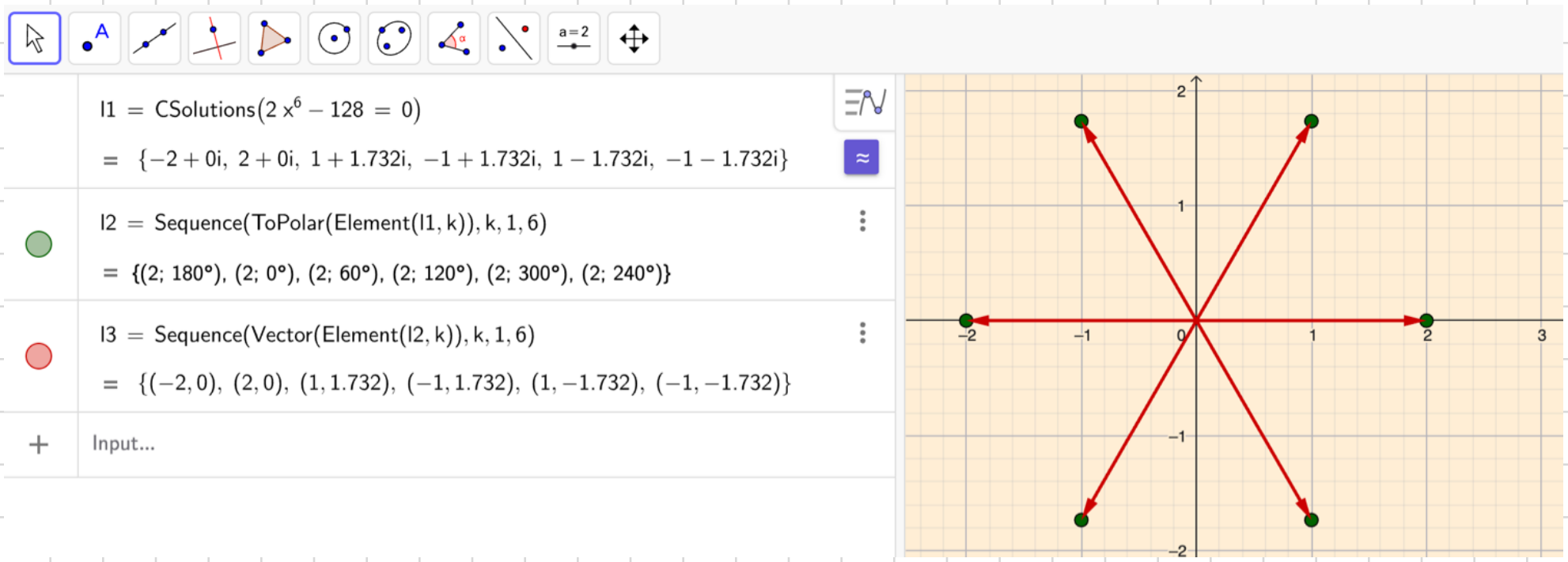
$x_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$

$x_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -1 + \sqrt{3}i$

$x_3 = 2e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$

$x_4 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -1 - \sqrt{3}i$

$x_5 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1 - \sqrt{3}i$



5262 En rot till ekvationen $z^5 = w$ har argumentet $\frac{\pi}{12}$ radianer.

a) Var i det komplexa talplanet ligger ekvationens rötter?

b) Vilka argument har de övriga rötterna?

Motivera dina svar.

5262.

a) $\Delta\theta = \frac{2\pi}{5}$ – Jämnt fördelade med mellanrummen $\frac{2\pi}{5}$

b) $\theta_1 = \frac{\pi}{12}$

$\theta_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi + 24\pi}{60} = \frac{29\pi}{60}$

$\theta_3 = \frac{29\pi}{60} + \frac{2\pi}{5} = \frac{29\pi + 24\pi}{60} = \frac{53\pi}{60}$

$\theta_4 = \frac{53\pi}{60} + \frac{2\pi}{5} = \frac{53\pi + 24\pi}{60} = \frac{77\pi}{60}$

$\theta_5 = \frac{77\pi}{60} + \frac{2\pi}{5} = \frac{77\pi + 24\pi}{60} = \frac{101\pi}{60}$

5263 Lös ekvationen och markera lösningen i det komplexa talplanet.

a) $z^8 = 1$ b) $z^5 = -1$

5263.

a) $z^8 = e^{i \cdot k \cdot 2\pi} \Rightarrow z = e^{i\frac{k\pi}{4}}$, $k = 0, 1, \ldots, 7$



l1 = CSolutions($z^8 = 1$)

= $\{-1 + 0i,\ 1 + 0i,\ i,\ -i,\ 0.707 + 0.707i,\ 0.707 - 0.707i,\ -0.707 + 0.707i,\ -0.707 - 0.707i\}$

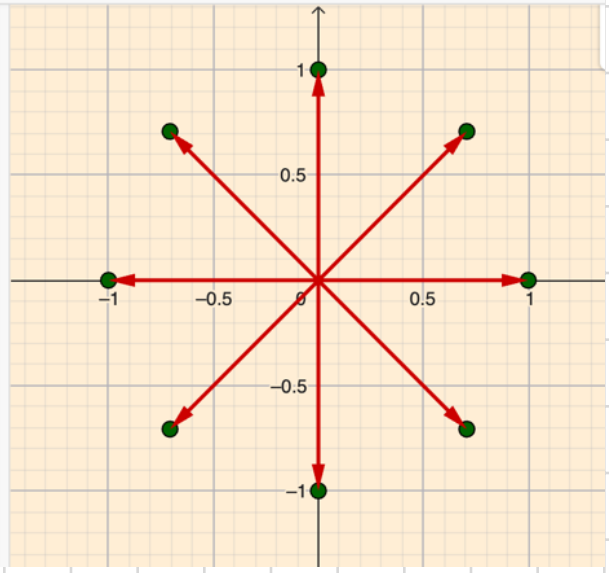
l2 = Sequence(ToPolar(Element(l1, k)), k, 1, 8)

= {(1; 180°), (1; 0°), (1; 90°), (1; 270°), (1; 45°), (1; 315°), (1; 135°), (1; 225°)}

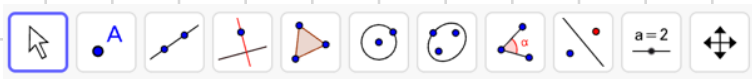
l3 = Sequence(Vector(Element(l2, k)), k, 1, 8)

= $\{(-1, 0),\ (1, 0),\ (0, 1),\ (0, -1),\ (0.707, 0.707),\ (0.707, -0.707),\ (-0.707, 0.707),\ (-0.707, -0.707)\}$

Input...



b) $z^5 = e^{i(\pi + k \cdot 2\pi)} \Rightarrow z = e^{i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$



l1 = CSolutions($z^5 = -1$)

= $\{-1 + 0i,\ 0.809 + 0.588i,\ -0.309 + 0.951i,\ 0.809 - 0.588i,\ -0.309 - 0.951i\}$

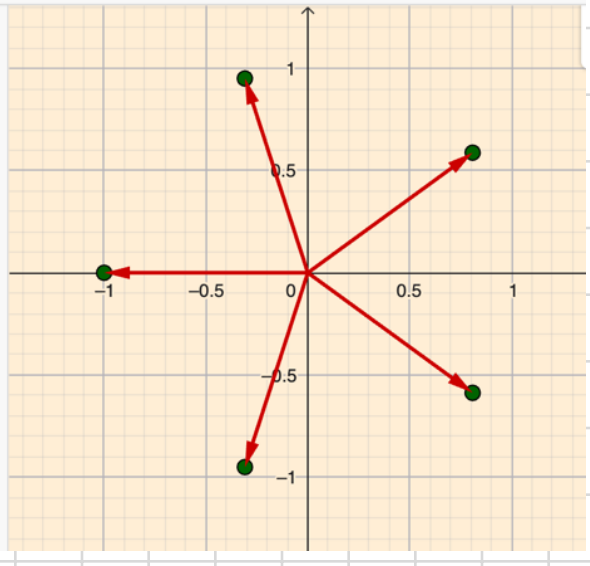
l2 = Sequence(ToPolar(Element(l1, k)), k, 1, 5)

= {(1; 180°), (1; 36°), (1; 108°), (1; 324°), (1; 252°)}

l3 = Sequence(Vector(Element(l2, k)), k, 1, 5)

= $\{(-1, 0),\ (0.809, 0.588),\ (-0.309, 0.951),\ (0.809, -0.588),\ (-0.309, -0.951)\}$

Input...



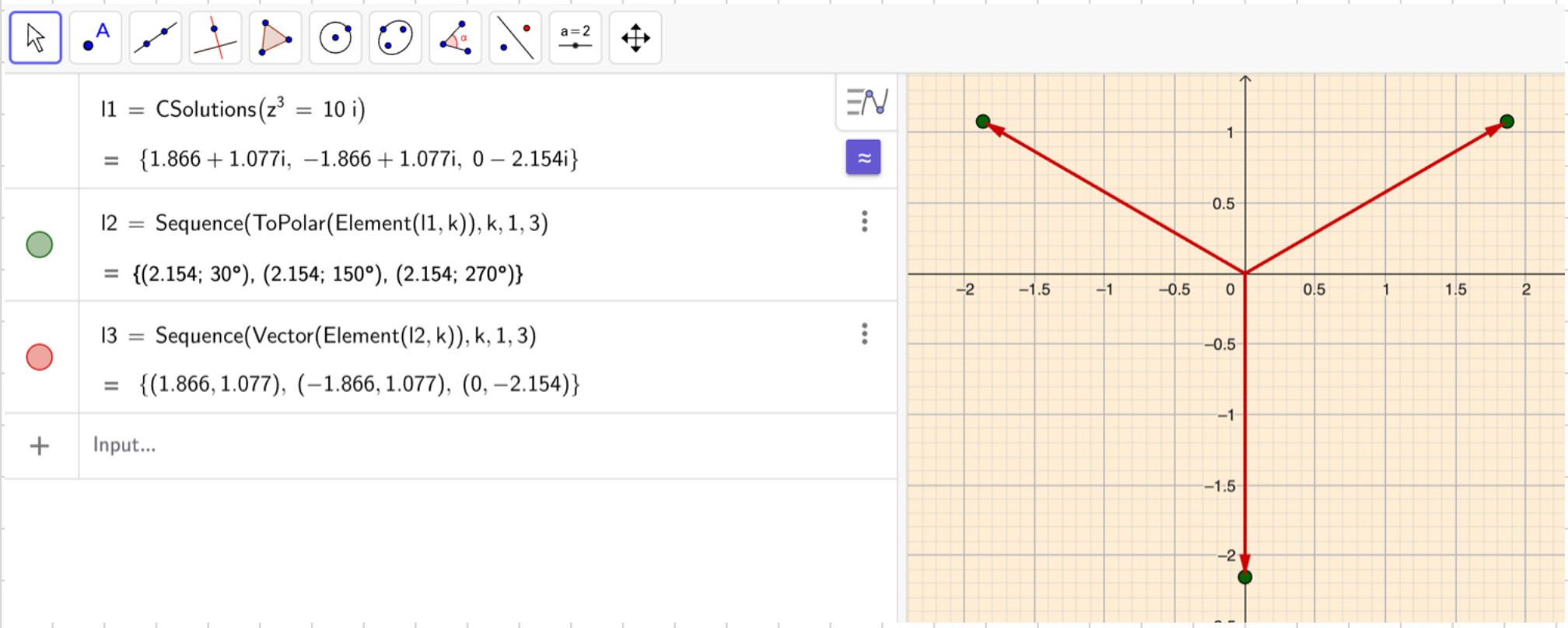
5264 Ö Konstruera en uppgift som kan lösas genom att man bestämmer rötter till en potensekvation med komplexa tal. Uppgiften ska innehålla talet $10i$ och resultaten ska ha argumenten 30°, 150° och 270°.

Låt $z^n = a + 10i$

$$\Delta\theta = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = \frac{360^\circ}{150^\circ - 30^\circ} = 3$$

$$\arg z = (30^\circ + k \cdot 120^\circ) \cdot 3 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow a = 0$$

$$z^3 = 10i$$



5272 Beräkna w^3 och ange resultatet i formen $a + bi$.

a) $w = e^{i\pi}$ b) $w = e^{i\pi/3}$

5272.

a) $w^3 = e^{i \cdot 3\pi} = \cos 3\pi + i \sin 3\pi = \underline{-1}$

b) $w^3 = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = \underline{-1}$

5273 Skriv w i formen $a + bi$.

a) $w = \dfrac{e^{i\pi}}{4e^{i\pi/4}}$ b) $w = \dfrac{5e^{i\pi/3}}{6e^{-i\pi/3}}$

5273.

a) $w = \dfrac{e^{i\pi}}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \underline{-\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} i}$

b) $w = \dfrac{5e^{i\frac{\pi}{3}}}{6e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{5}{6} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{5}{6}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \underline{-\frac{5}{12} + \frac{5\sqrt{3}}{12} i}$

5274 Visa att $6e^{-i\pi/3}/3e^{i\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}$

(*Np MaE vt 1998*)

5274.

$$VL = \frac{6e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{-\frac{2\pi}{3}} = 2e^{\frac{4\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - i\sqrt{3} = HL \qquad \#$$

5275 Skriv z i formen re^{iv}, där $r = |z|$.

a) $z = 1 + 2i$ b) $z = -3i$

5275.

a) $r = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$v = \arctan 2 \approx 63°$

$\Rightarrow z = \sqrt{5}\,e^{i\cdot 63°}$

b) $r = 3$

$v = -90°$

$\Rightarrow z = 3e^{-i90°}$

5276 Hitta en lösning till ekvationen genom att bestämma z i formen $x + iy$.

a) $e^z = e^4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

b) $e^z = \sqrt{3} + 2i$

c) $2e^z - \sqrt{2} = i\sqrt{2}$

5276.

a) $e^z = e^4 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}} = e^{4+i\cdot\frac{\pi}{12}} \Rightarrow z = \underline{4 + i\cdot\frac{\pi}{12}}$

b) $e^z = \sqrt{7}\,e^{i\cdot 0{,}86} = e^{\frac{1}{2}\ln 7} \cdot e^{i\cdot 0{,}86} = e^{\frac{1}{2}\ln 7 + i\cdot 0{,}86} \Rightarrow z = \underline{\frac{1}{2}\ln 7 + i\cdot 0{,}86}$

c) $e^z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z = \underline{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

5277 Ö Konstruera en uppgift som kan lösas med hjälp av Eulers formel. Uppgiften ska innehålla talen e och i och resultatet ska ha argumentet π radianer.

5277 $e^z + 1 = 0$ (Eulers identitet)

5278 Visa med hjälp av Eulers formel att likheten gäller för alla reella tal x.

a) $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

b) $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

5278.

a) $HL = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}(\cos x + i\sin x + \cos(-x) + i\cdot\sin(-x)) =$

$= \frac{1}{2}(\cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x) = \cos x = VL$ #

b) $HL = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}(\cos x + i\sin x - \cos(-x) - i\sin(-x)) =$

$= \frac{1}{2}(\cos x + i\sin x - \cos x + i\sin x) = \sin x = VL$ #

5279 Visa att det komplexa konjugatet till e^{iv} är e^{-iv}.

5279. $e^{iv} = \cos v + i\sin v$

$e^{-iv} = \cos(-v) + i\sin(-v) = \cos v - i\sin v$ #