4107 Bestäm ett värde på konstanten a så att
ö $y = \sin ax$ har

a) två extrempunkter i intervallet $0 \le x \le \pi$

b) två maximipunkter i intervallet $0 \le x \le \pi$

4107.

a) $a = 2$

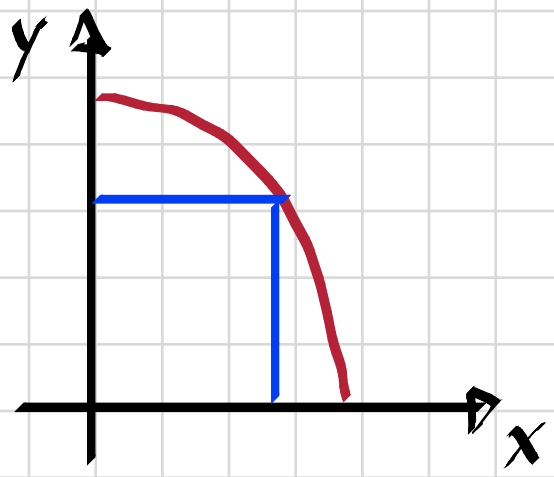
b) $a = 4$

4108 Funktionen $f(x) = ax^2 + x + 2$ har en maximipunkt där $x = 0{,}5$. Bestäm konstanten a.

4108. $f'(x) = 2ax + 1$

$f'(0{,}5) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 0.5 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

4109 En rektangel ligger i första kvadranten med ett hörn i origo, ett på x-axeln, ett på y-axeln och det fjärde hörnet på kurvan $y = -x^2 + 3$. Bestäm rektangelns maximala area.



4109.

$A = xy = -x^3 + 3x$

$A' = -3x^2 + 3$

$A' = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$

$A'' = -6x$, $A''(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ maximum

$A_{max} = A(1) = -1^3 + 3 \cdot 1 = 2$ a.e.

4110 Visa att $f(x) = \dfrac{\ln 2x}{x}$ har sitt största värde för $x = \dfrac{e}{2}$.

4110. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln 2x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln 2x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln 2x = 0$

$\ln 2x = 1$

$2x = e$

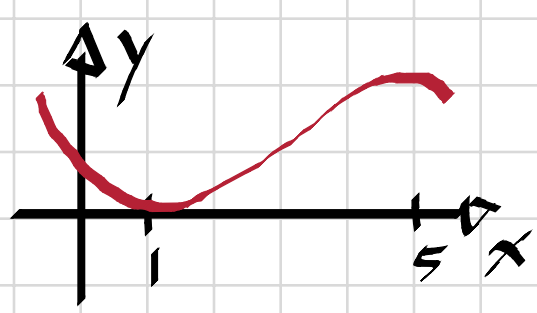
$x = \dfrac{e}{2}$ #

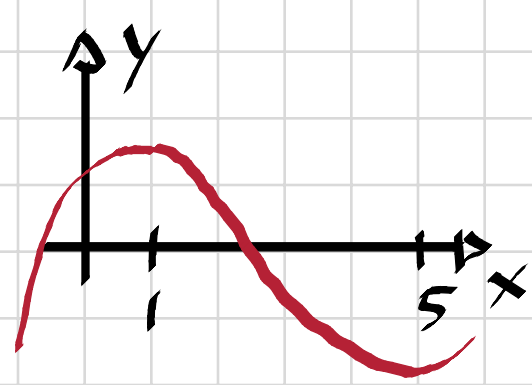
4111 a) För en funktion gäller att $f'(1) = f'(5) = 0$.
ö Ge minst två exempel på hur grafen till funktionen kan se ut.

b) Vad kan du mer säga om grafen om du får reda på att $f'(x) > 0$ för $1 < x < 5$?

c) Skissa grafen om du dessutom får veta att det är en tredjegradsfunktion och att $f(1) = -1$.

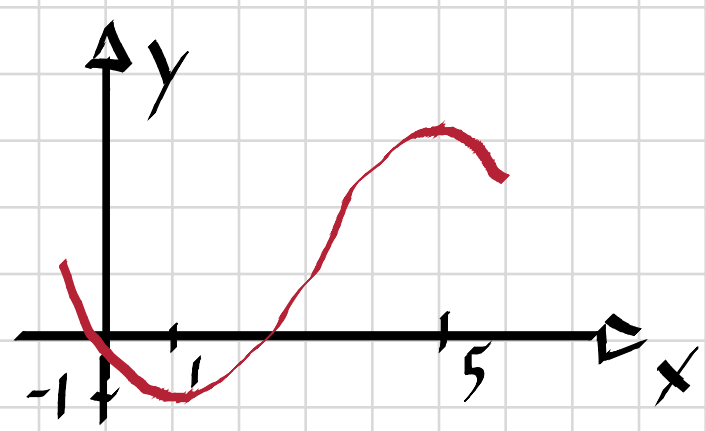
4111. a)





b) Att funktionen är sträng**t** växande i intervallet mellan 1 och 5

c)



4112 Funktionen $f(x) = ax^2 + 2x + 1$ har största värdet 2. Bestäm konstanten a.

4112.

$$f'(x) = 2ax + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2ax + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{a}$$

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = 2 \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) + 1 = 2$$

$$\frac{1}{a} - \frac{2}{a} = \frac{a}{a}$$

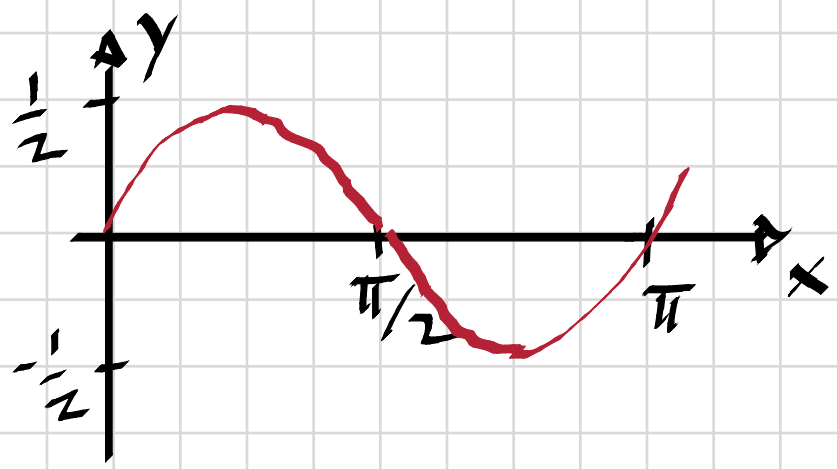
$$a \neq 0 \Rightarrow 1 - 2 = a \Rightarrow a = -1$$

4113 Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x) = \sin x \cos x$ i intervallet $0 \leq x \leq 3{,}2$.

4113.

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

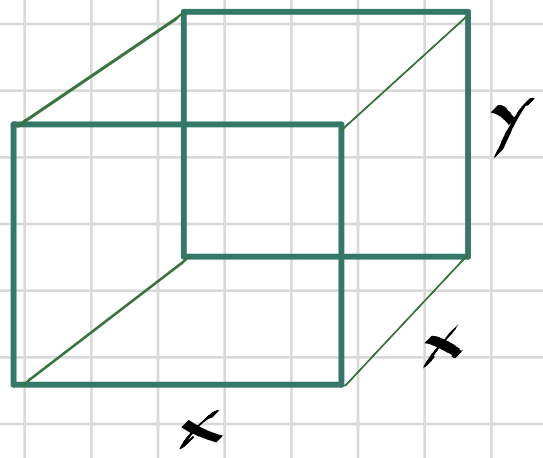


Största värde: $\frac{1}{2}$ då $x = \frac{\pi}{4}$

Minsta värde: $-\frac{1}{2}$ då $x = \frac{3\pi}{4}$

4114 En plastlåda utan lock ska ha formen av ett rätblock. Bottenplattan ska vara kvadratisk och tillverkas av tjock plast som kostar 2,00 kr/m^2. De fyra sidorna ska göras av tunnare plast med priset 0,90 kr/m^2. Lådans volym ska vara 0,020 m^3. Bestäm de mått på lådan som ger minsta möjliga materialkostnad.

(*Np MaE ht 1996*)



4114.

$K = 2x^2 + 4 \cdot 0.9\,xy$

$x^2 y = 0.02$

$K(x) = 2x^2 + \dfrac{4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}02}{x} = 2x^2 + \dfrac{0{,}072}{x}$

$K'(x) = 4x - \dfrac{0{,}072}{x^2}$

$K'(x) = 0 \Rightarrow 4x - \dfrac{0{,}072}{x^2} = 0$

$x^3 = \dfrac{0{,}072}{4} = 0{,}018$

$x = 0{,}018^{1/3} = 0{,}262 \Rightarrow y = \dfrac{0{,}02}{0{,}262^2} \approx 0{,}291$

Lådan ska ha måtten 26 x 26 x 29 cm.

4115 Maximi- och minimipunkterna på kurvan $y = x^4 - 6x^2 + 6$ bildar hörnen i en triangel. Bestäm triangelns area.

4115.

$$y'(x) = 4x^3 - 12x$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x = 0$$

$$4x(x^2 - 3) = 0$$

$$4x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{3}$$

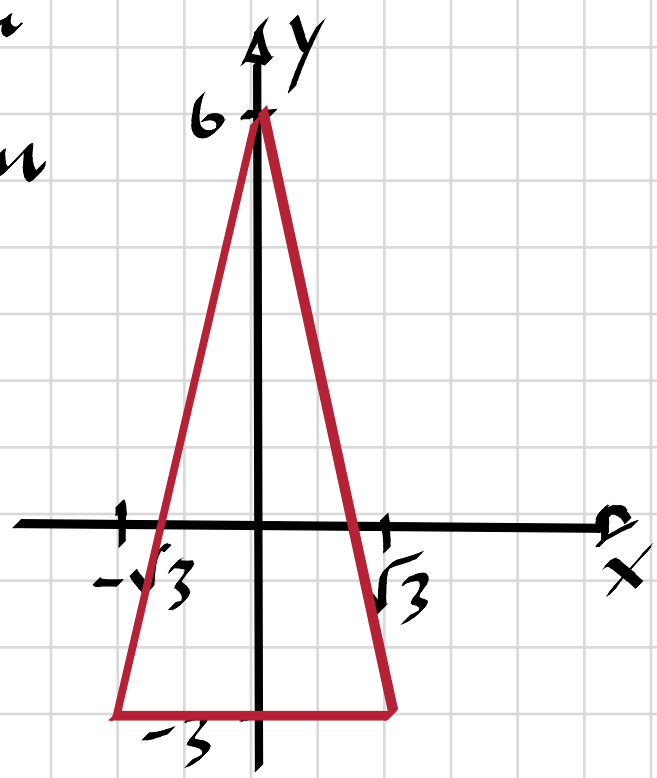
$$y''(x) = 12x^2 - 12$$

$y''(0) = -12 < 0 \Rightarrow$ maximum

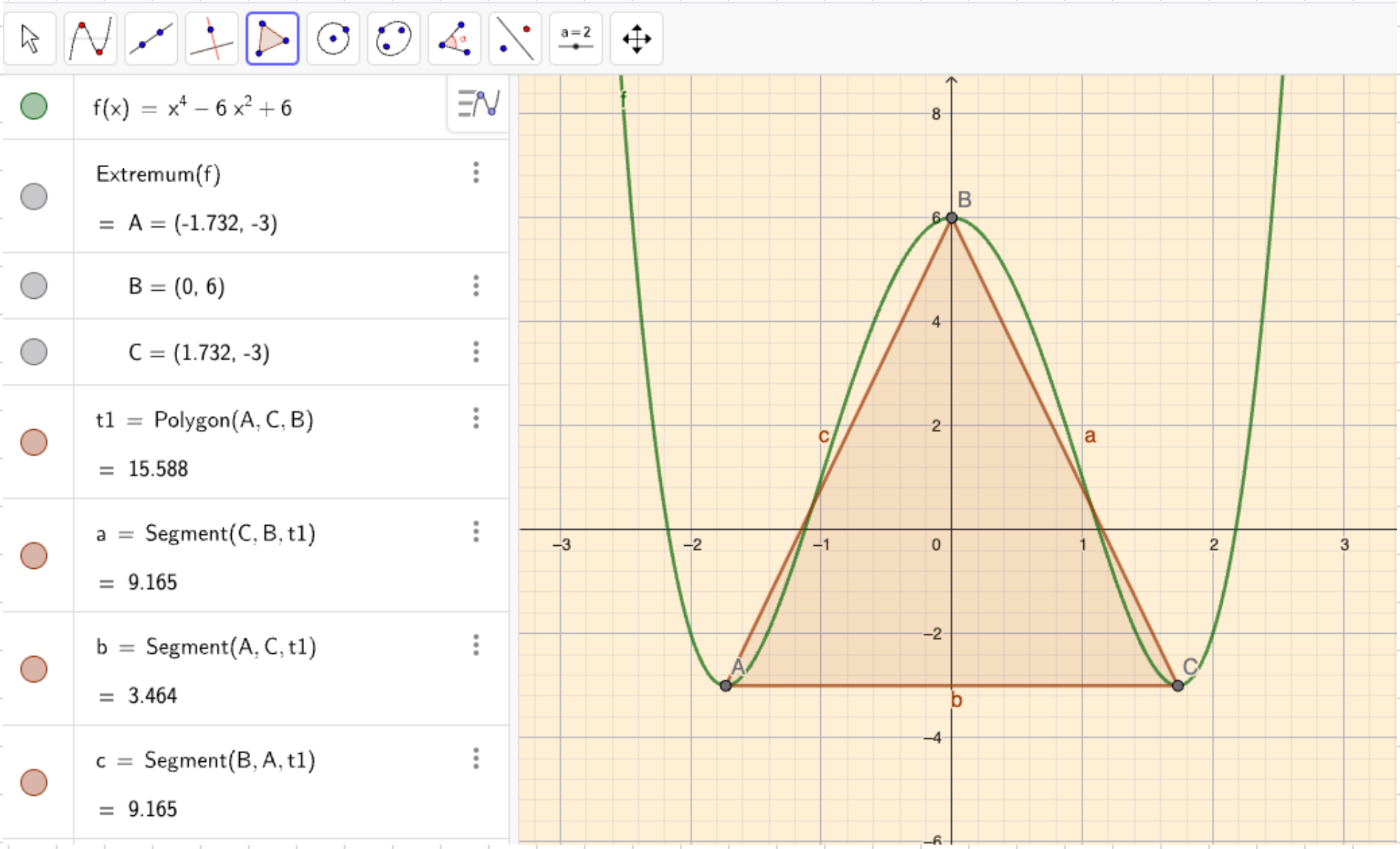
$y''(\pm\sqrt{3}) = 24 > 0 \Rightarrow$ minimum

$$y(0) = 6$$

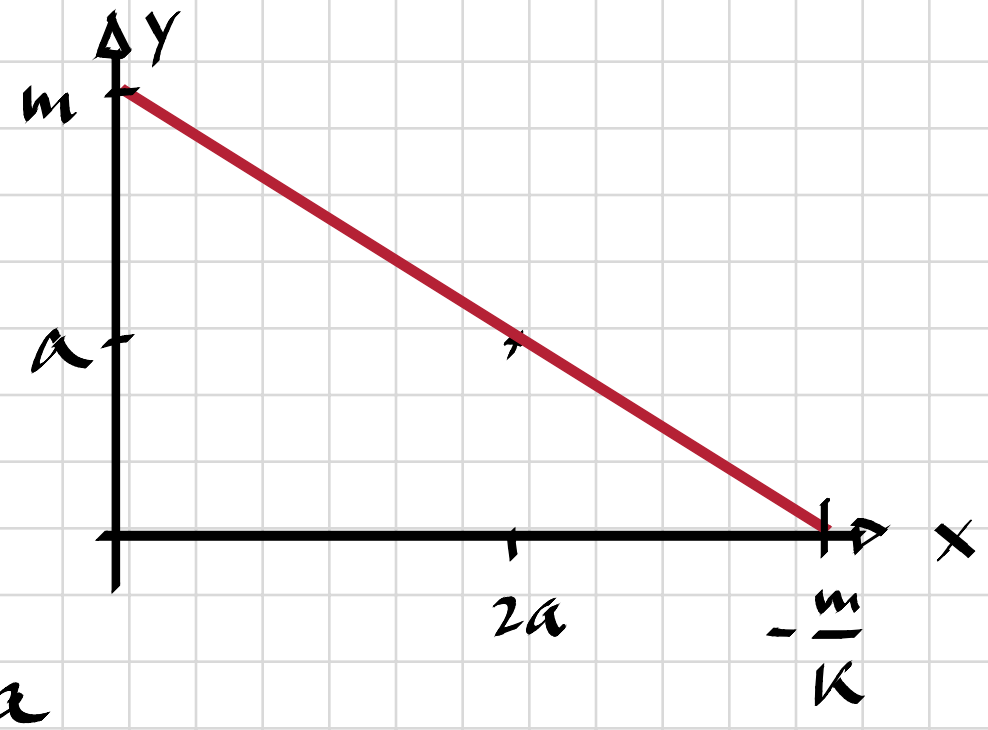
$$y(\pm\sqrt{3}) = 9 - 18 + 6 = -3$$



$$\text{Arean} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 9}{2} = 9\sqrt{3}\ \text{a.e.}$$


f(x) = x^4 − 6 x^2 + 6
Extremum(f)
= A = (-1.732, -3)
B = (0, 6)
C = (1.732, -3)
t1 = Polygon(A, C, B)
= 15.588
a = Segment(C, B, t1)
= 9.165
b = Segment(A, C, t1)
= 3.464
c = Segment(B, A, t1)
= 9.165
a = 2
f
A
B
C
a
b
c

4116 Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $(2a, a)$, där $a > 0$, och som tillsammans med de positiva axlarna bildar den till arean minsta triangeln.



4116.

$$y = kx + m$$

$$y(2a) = a \Rightarrow 2ak + m = a$$

$$m = a(1 - 2k)$$

$$\frac{m}{k} = \frac{a(1-2k)}{k}$$

$$A = \frac{-\frac{m}{k} \cdot m}{2} = -\frac{m^2}{2k} = -\frac{a^2(1-2k)^2}{k}$$

$$A'(k) = -a \cdot \frac{-4\cdot(1-2k)\cdot k - (1-2k)^2}{k^2} = -a \cdot \frac{4k^2-1}{k^2}$$

$$A'(k) = 0 \Rightarrow 4k^2 - 1 = 0$$

$$(2k+1)(2k-1) = 0$$

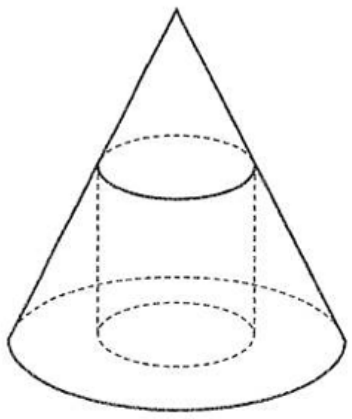
$$k < 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = a(1 + 2\cdot\tfrac{1}{2}) = 2a$$

$$A''(k) = -a \cdot \frac{8k\cdot k^2 - (4k^2-1)\cdot 2k}{k^4} = -a \cdot \frac{2}{k^3}$$

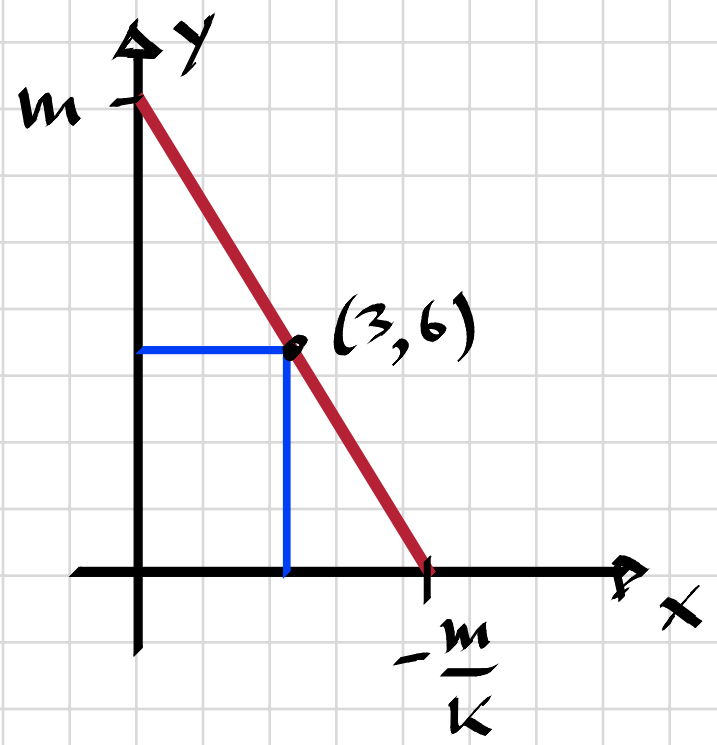
$$A''(-\tfrac{1}{2}) = -a \cdot \frac{2}{(-\frac{1}{2})^3} > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

$$y = -\frac{x}{2} + 2a$$

4117 På ett bord står en rak cirkulär cylinder med radien $R = 3{,}0$ cm och höjden $H = 6{,}0$ cm. Till cylindern ska tillverkas en rak cirkulär kon som ska sättas över cylindern så att konens baskant vilar på bordet. Bestäm konens minsta möjliga volym med två siffrors noggrannhet.



(Np MaE ht 1998)



4117.

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot (\frac{m}{k})^2 \cdot m}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{m^3}{k^2}$$

$y = kx + m$

$y(3) = 6 \Rightarrow 3k + m = 6 \Rightarrow k = \frac{6-m}{3}$

$$V(m) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9m^3}{(6-m)^2} = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{m^3}{(6-m)^2}$$

$$V'(m) = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{3m^2 \cdot (6-m)^2 + m^3 \cdot 2(6-m)}{(6-m)^4}, \quad m \neq 6$$

$V' = 0 \Rightarrow (6-m)(3m^2(6-m) + 2m^3) = 0$

$(6-m) \cdot m^2 (18-m) = 0 \Rightarrow m = 18 \Rightarrow k = \frac{6-18}{3} = -4$

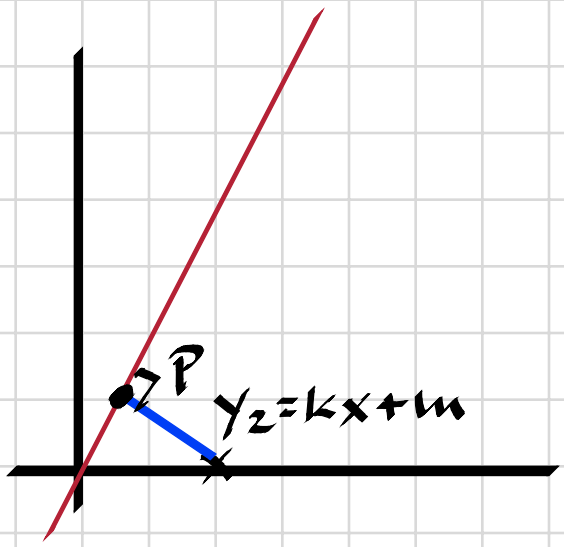
$$V'(m) = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{18m^2 - 5m^4 + 12m^3}{(6-m)^4}$$

$$V''(m) = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{(36m - 20m^3 + 36m^2)(6-m)^4 - (18m^2 - 5m^4 + 12m^3)\cdot(-4)\cdot(6-m)^3}{(6-m)^8}$$

$$V''(18) = \frac{3}{\pi} \quad \frac{-2163345408 + 3103930368}{429981696} > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

$$V_{min} = V(k=-4, m=18) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{18^3}{(-4)^2} = 380\ cm^3$$

4118 Vilken punkt på linjen $y = 2x$ ligger närmast punkten $(2, 0)$?



4118.

$y_2 = kx + m$

Vinkelrät mot y $\Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

$y_2(2) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 2 + m = 0 \Rightarrow m = 1$

$y_2 = -\frac{x}{2} + 1$

Skärningspunkten P:

$2x = -\frac{x}{2} + 1$

$\frac{5x}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{5}, y = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

$P = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$

4124 Skissa grafen till $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ i intervallet $-2 \le x \le 1$ och bestäm funktionens största och minsta värde i intervallet.

4124,

$$f(x) = x(x^2 - 3x - 9)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

Nollställen:

$$x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9 + 36}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$$

$$x_1 \approx -1.85 \,, \; x_2 = 0 \,, \; x_3 \approx 4.85$$

Extrempunkter:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm 2$$

$$x_1 = -1 \,, \; y_1 = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) = 5$$

$$x_2 = 3 \,, \; y_2 = f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 = -27 \quad \text{(utanför def-mängd)}$$

Karaktär:

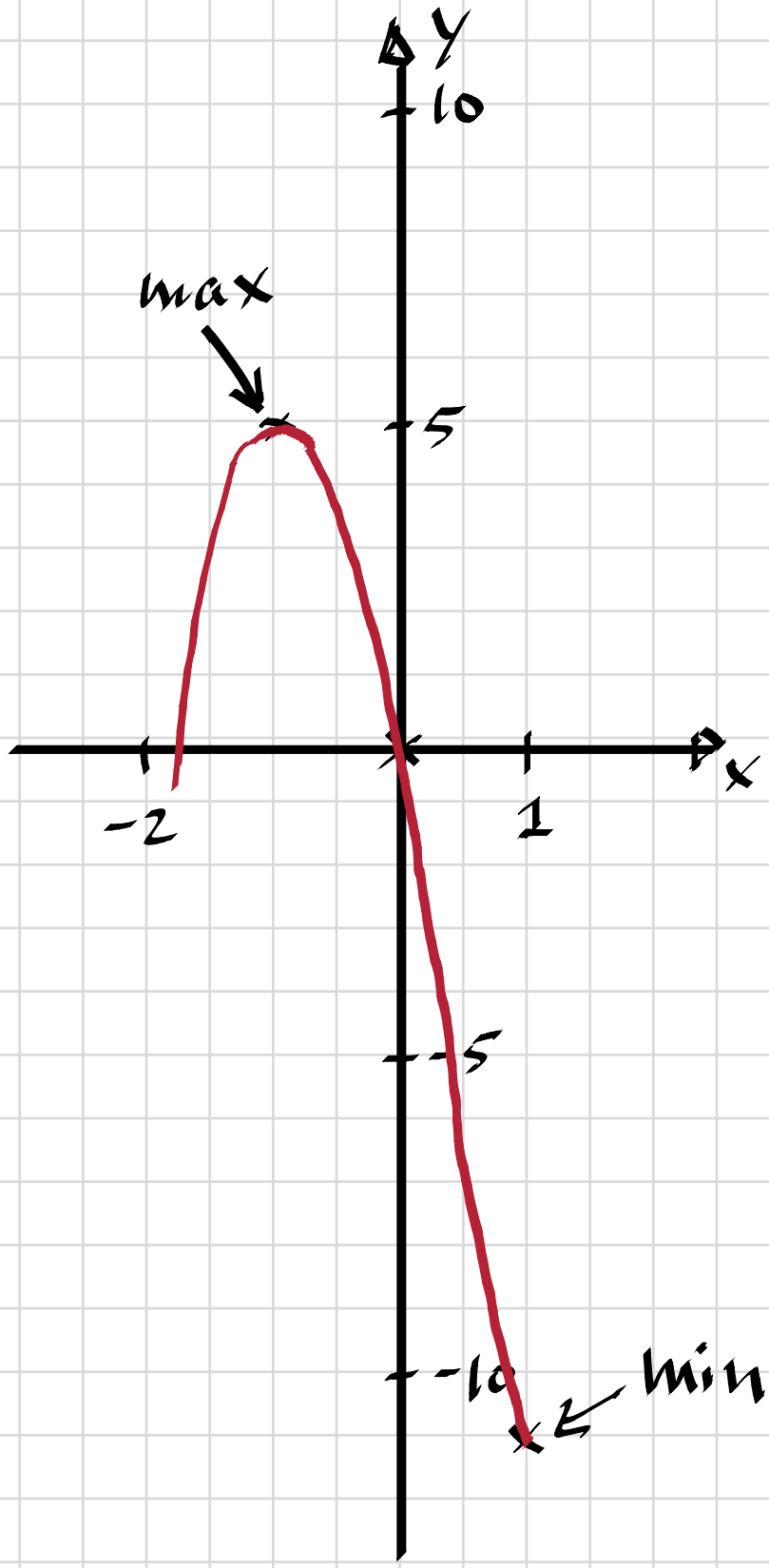
$$f''(-1) = 6(-1 - 1) = -12 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$f''(3) = 6(3 - 1) = 12 > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

Gränspunkter:

$$x_1 = -2 \,, \; y_1 = f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) = -2$$

$$x_2 = 1 \,, \; y_2 = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 = -11$$



Största värde = 5

Minsta värde = -11

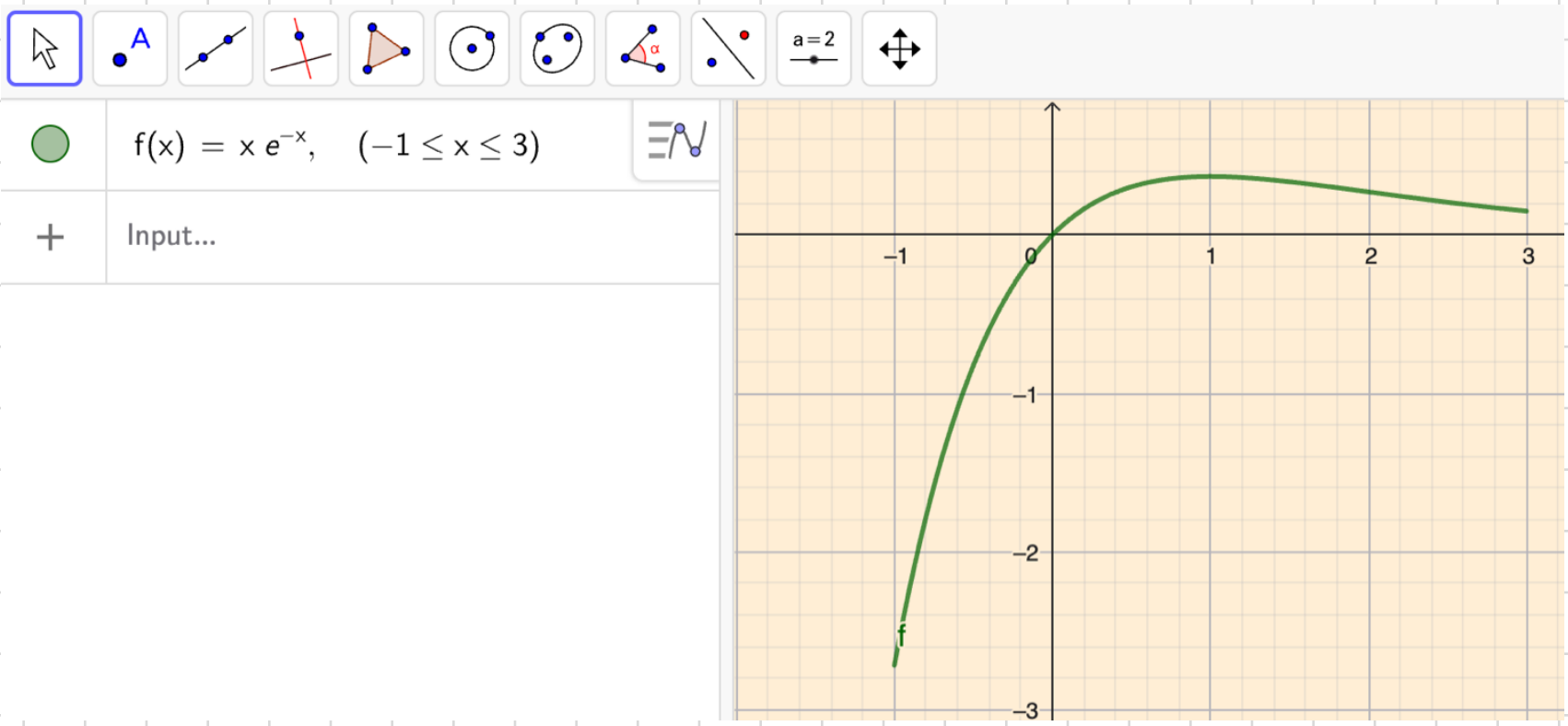
4125 Skissa graferna i angivet intervall.

a) $f(x) = xe^{-x}$ $\quad -1 \le x \le 3$

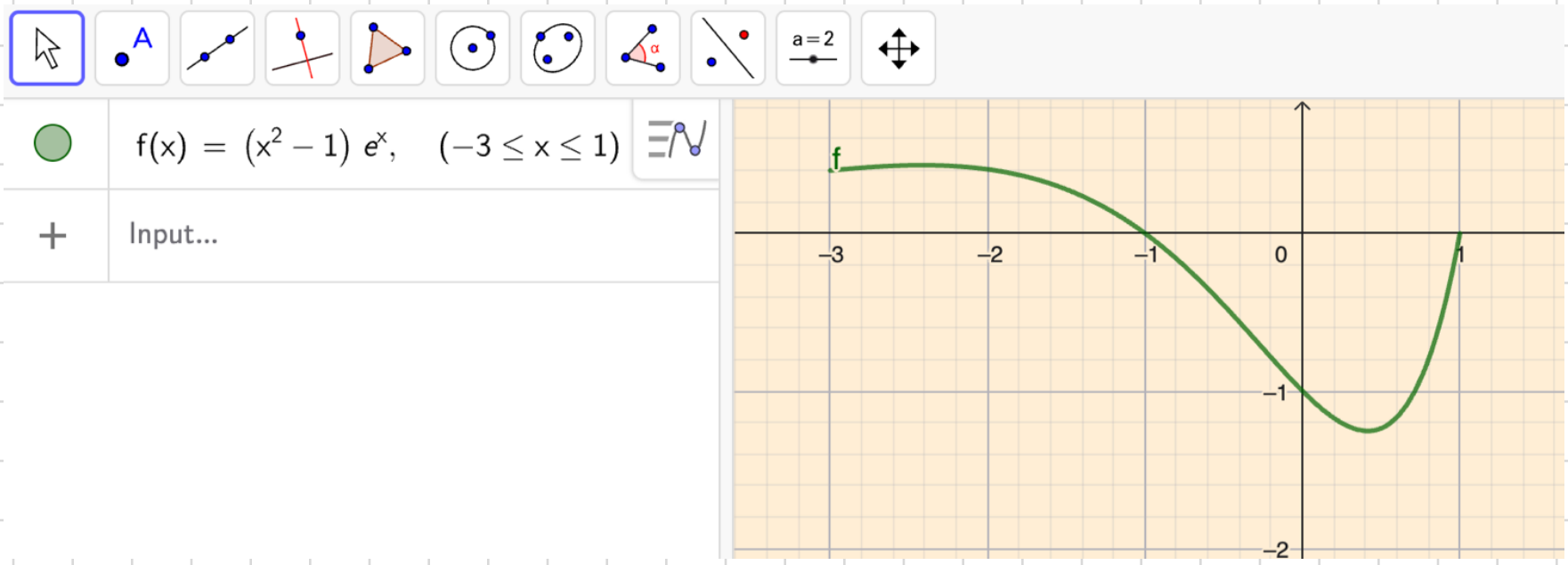
b) $f(x) = (x^2 - 1)e^x$ $\quad -3 \le x \le 1$

4125. Använder här Geogebra.

a)



b)



4126 Skissa grafen till $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

4126.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 = x^3(3x-4)$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

$$f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$$

Nollställen:

$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \;,\; x_2 = \frac{4}{3}$

Extrempunkter:

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0 \;,\; y_1 = f(0) = 0$

$x_2 = 1 \;,\; y_2 = f(1) = 1 \cdot (3 \cdot 1 - 4) = -1$

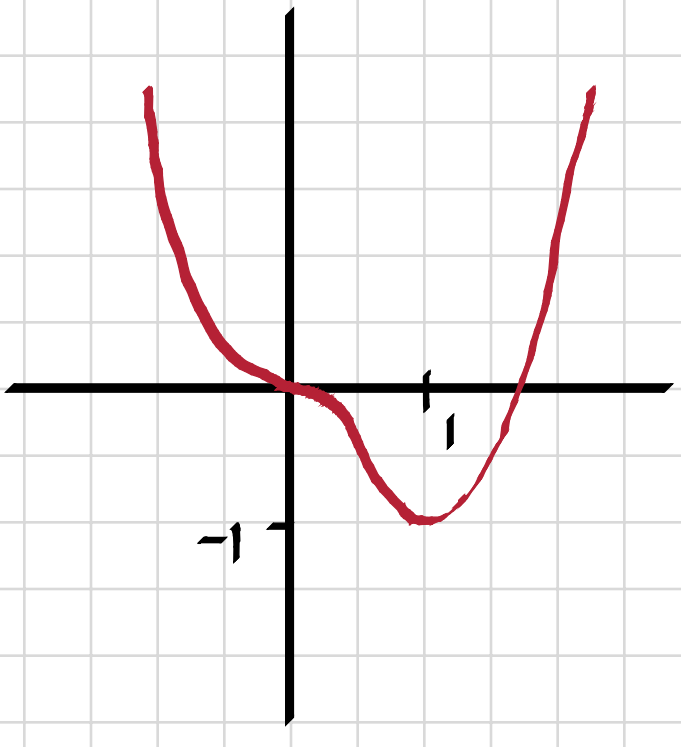
Karaktär:

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ kräver teckenstudie

$f''(1) = 12 \cdot (3 \cdot 1 - 2) = 12 > 0 \Rightarrow$ minimum

Teckenstudie:

x		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0 terass	$\searrow$	-1 min.	$\nearrow$



4127 Skissa grafen till $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, för $x > 0$.

4127.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x \ln x - 3x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

Nollställen:

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

Extrempunkter:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$, $y = f(e) = \frac{1}{e}$

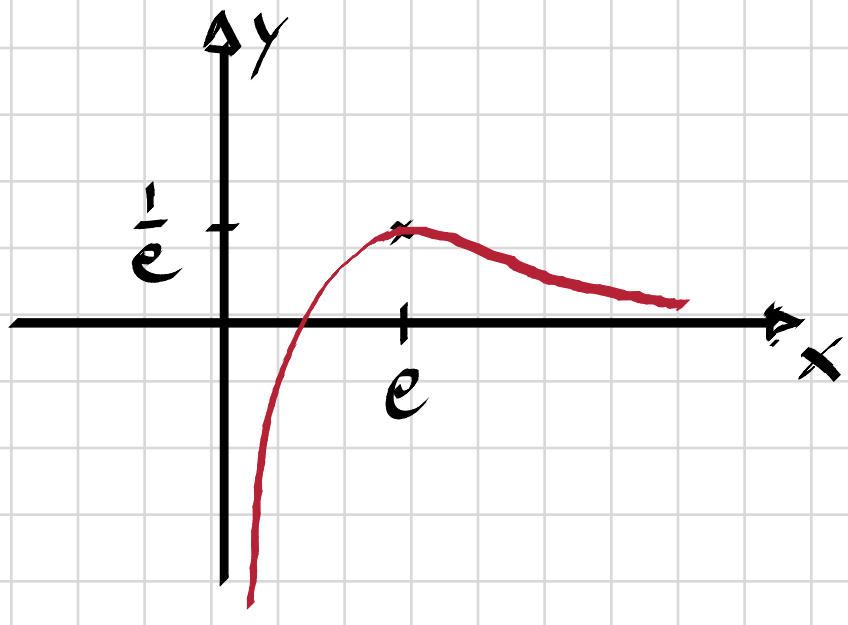
Karaktär:

$f''(e) = \frac{2 \cdot 1 - 3}{e^3} < 0 \Rightarrow$ Maximum

Gränsvärden:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = 0$$



4128 Hur ska man välja k så att $f(x) = x^3 + kx$ saknar extrempunkter?

4128.

$$f(x) = x^3 + kx = x(x^2 + k)$$

$$f'(x) = 3x^2 + k$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + k = 0$

Saknar lösning om $k > 0$

(Om $k = 0$ fås en terasspunkt i origo)

4129 Bestäm konstanterna a och b så att grafen till $f(x) = ax^4 + bx^3$ får ett lokalt minimum i punkten $(1, 7)$.

Fel i uppgiften:
skall vara maximum.

4129.

$$f(x) = ax^4 + bx^3 = x^3(ax + b)$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 = x^2(4ax + 3b)$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx = 6x(2ax + b)$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4ax + 3b = 0 \quad (x \neq 0)$

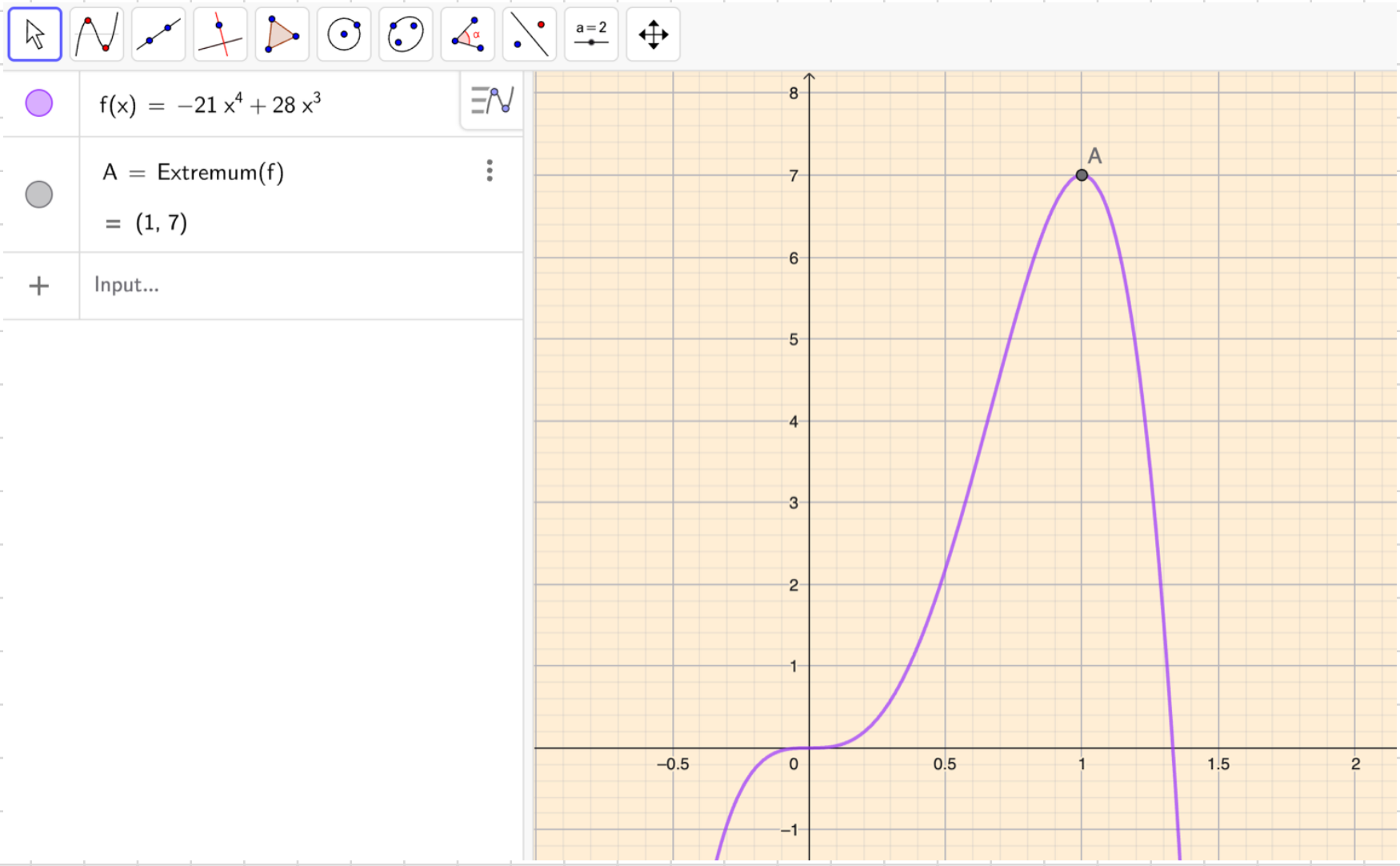
$$\left.\begin{aligned} f'(1) = 0 &\Rightarrow 4a + 3b = 0 \\ f(1) = 7 &\Rightarrow a + b = 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 3b = 0 \\ -\left(4a + 4b = 28\right) \end{cases}$$

$b = 28$, $a = -\frac{3}{4} \cdot 28 = -21$

Kontroll:

$f''(1) = 6 \cdot 1(2 \cdot (-21) + 28) < 0 \Rightarrow$ maximum

$a = -21$, $b = 28$ ger ett maximum i $(1, 7)$



4130 Björn ska skissa grafen till en funktion $y = f(x)$. Han deriverar funktionen två gånger och finner att $f'(0) = f''(0) = 0$. Kan Björn dra slutsatsen att grafen $y = f(x)$ har en terrasspunkt för $x = 0$? Motivera ditt svar.

4130. Nej, högre ordningens funktioner kan ge $f'(0) = f''(0) = 0$ även för extrempunkter, ex v $f(x) = x^4$.
Fås $f''(0)$ rekommenderas teckenstudium.

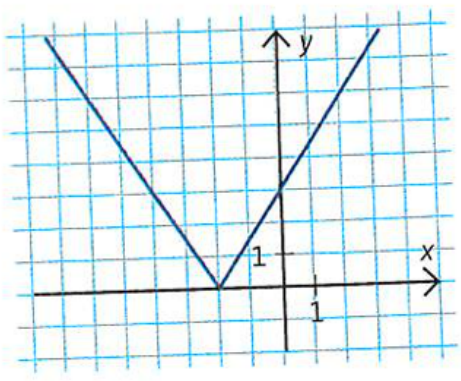
4140 Ge ett exempel på en funktion som är kontinuerlig för alla x men inte deriverbar för $x = 0$.

4140. $f(x) = |x|$

4141 Ge ett exempel på en funktion som är kontinuerlig för alla x men som inte är deriverbar för $x = -2$.

4141 $f(x) = |x+2|$

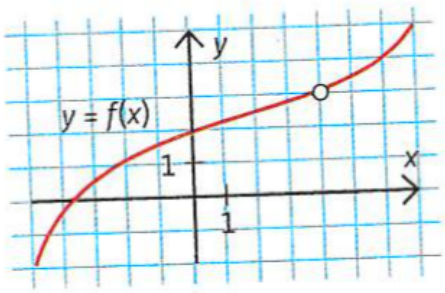
4142 Figuren föreställer graferna till ett funktionsuttryck av formen $f(x) = |kx + m|$. Vilka värden kan konstanterna k och m ha?



4142. $k = \frac{3}{2}$, $m = 3$

$k = -\frac{3}{2}$, $m = -3$

4143 Bestäm med hjälp av figuren



a) definitionsmängden till f

b) gränsvärdet $\lim_{x \to 4} f(x)$

4143 a) $-5 \leq x < 4 \quad , \quad 4 < x \leq 7$

b) 3

4144 Bestäm följande gränsvärden

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}$

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \to \infty} e^{-x} \cdot e^{-\ln x} = \lim_{x \to \infty} e^{-(x + \ln x)} = 0$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

$0 \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq 0$

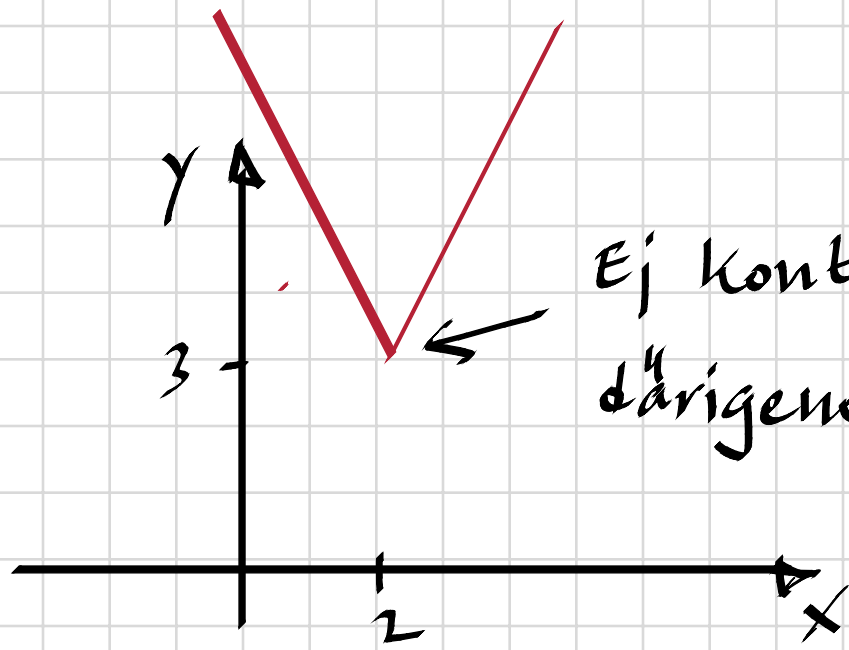
$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

c) Enligt samma princip blir även $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

4145 Visa att funktionen $f(x) = |2x - 4| + 3$ inte är deriverbar för $x = 2$.

4145.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \\ 7 - 2x \end{cases} \qquad f'(2) = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$



Ej kontinuerlig och därigenom ej deriverbar.

Derivatan kan inte ha två olika värden i samma punkt. #

4209 Ange ett funktionsuttryck $f(x)$ till en funktion f som har en vertikal asymptot med ekvationen $x = 4$ och en horisontell asymptot med ekvationen $y = 2$.

4209.

$$f(x) = \frac{1}{x - 4} + 2$$

4210 Bestäm den horisontella asymptoten till grafen $y = f(x)$ om

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{x} + 8$

c) $f(x) = \frac{x}{2x-4}$ d) $f(x) = \frac{x+3}{3x+6}$

4210. a) $y = 0$ c) $y = \frac{1}{2}$

b) $y = 8$ d) $y = \frac{1}{3}$

4211 Bestäm eventuella vertikala och horisontella asymptoter till kurvan $y = \frac{1}{x^2}$.

4211. Asymptoter: $x = 0$, $y = 0$

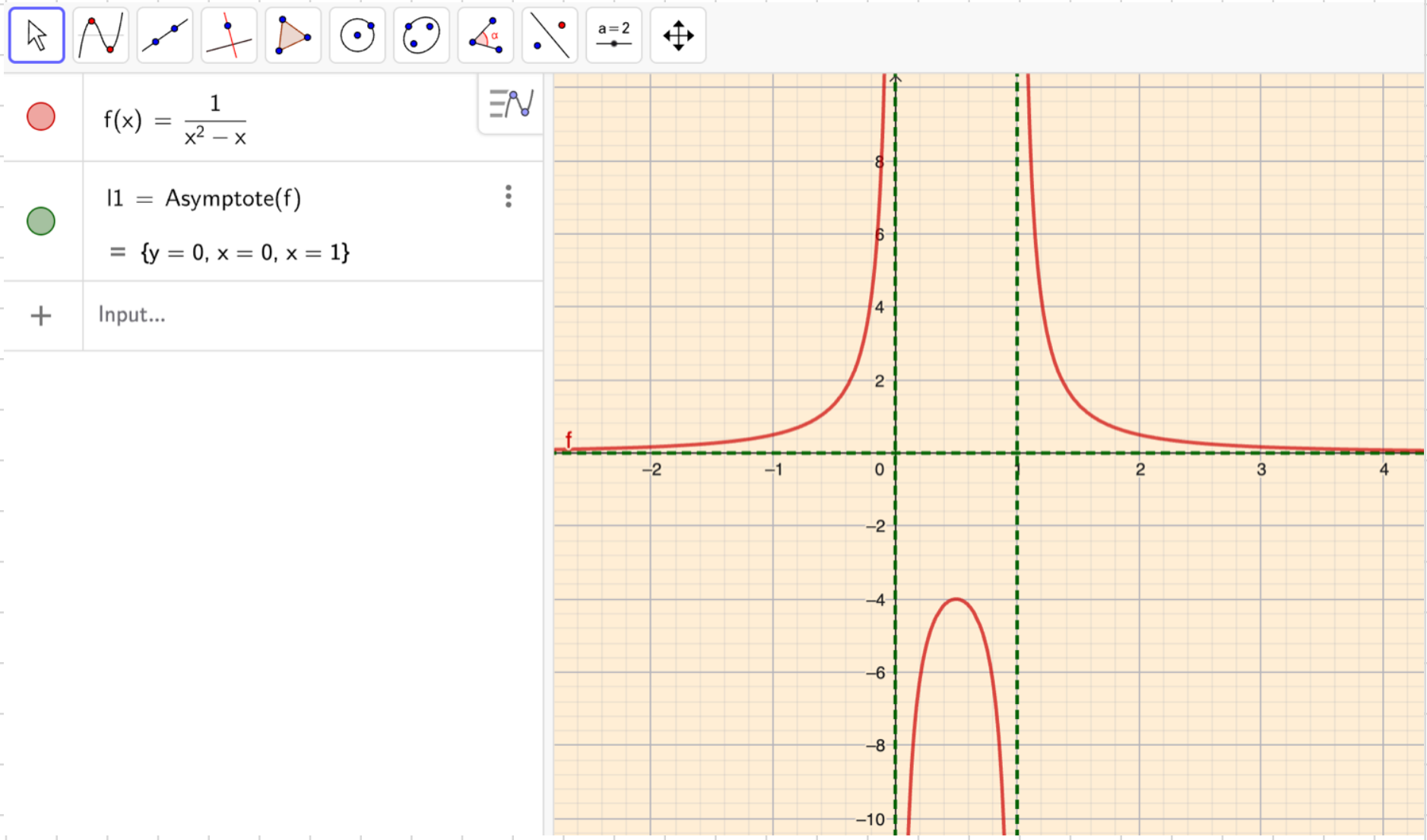
4212 Bestäm de vertikala asymptoterna till $y = \frac{1}{x^2 - x}$

4212. $y = \frac{1}{x(x-1)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 - x} = \infty$

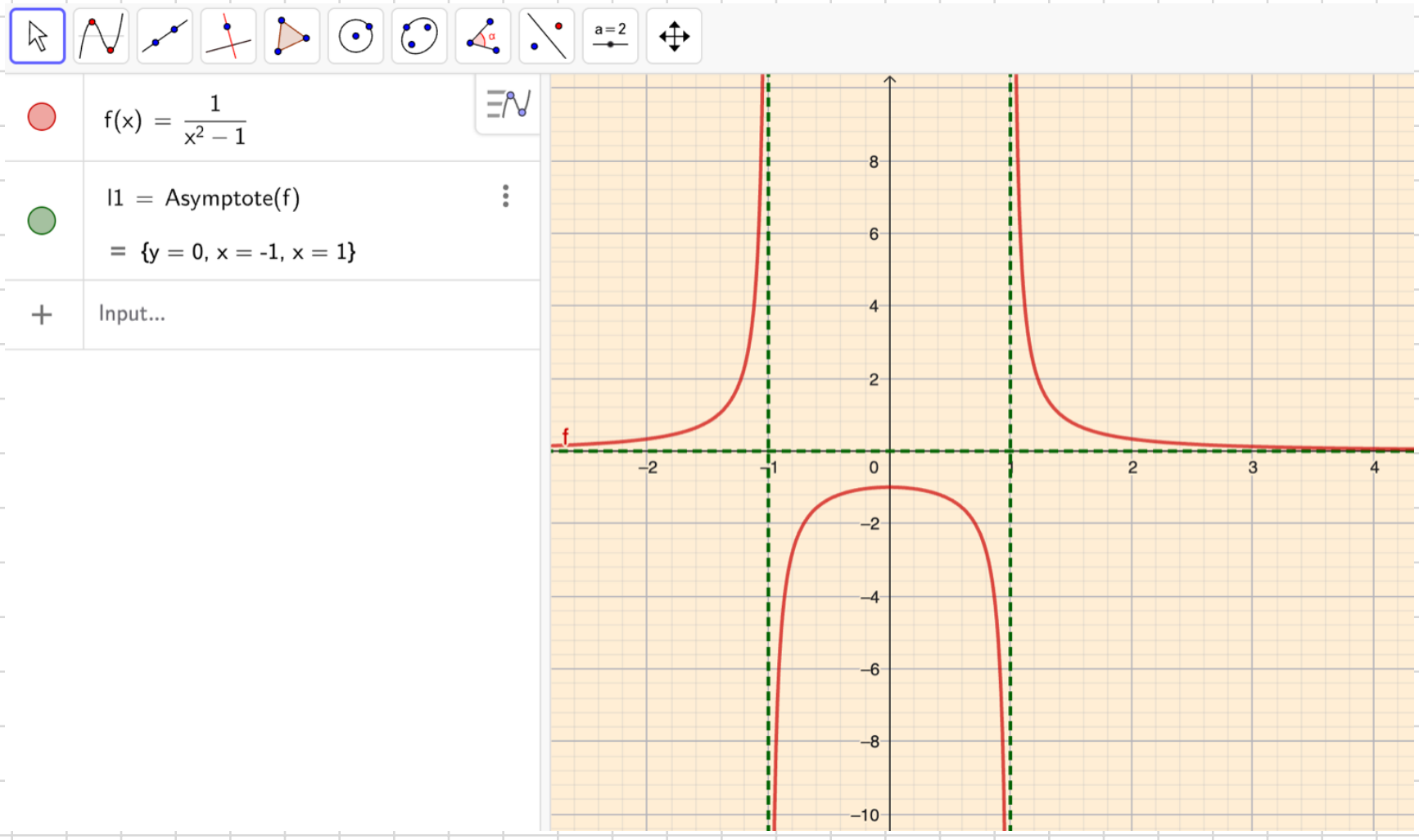
$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - x} = \infty$

Asymptoter: $x = 0$, $x = 1$



4213 **Ö** Ange funktionsuttrycket $f(x)$ till en funktion vars graf har vertikala asymptoter för $x = 1$ och $x = -1$.

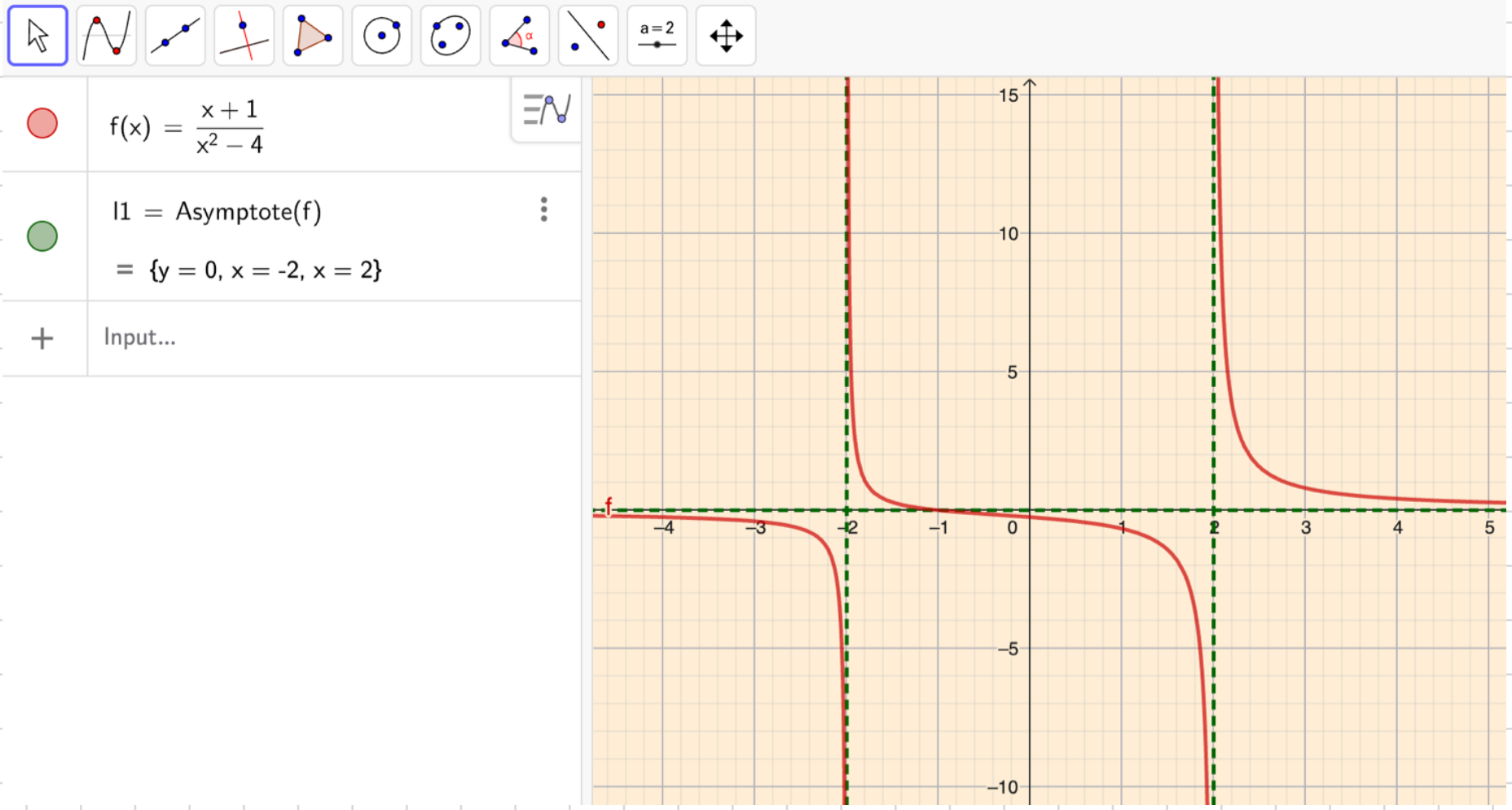
4213. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x^2-1}$



4214 Bestäm eventuella vertikala asymptoter till kurvan $y = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

4214. $y = \dfrac{x+1}{(x+2)(x-2)}$

Vertikal asymptoter: $x = -2$, $x = 2$



4215 Ge ett exempel på en vertikal asymptot till kurvan $y = \tan x$. Hur många vertikala asymptoter finns det till kurvan?

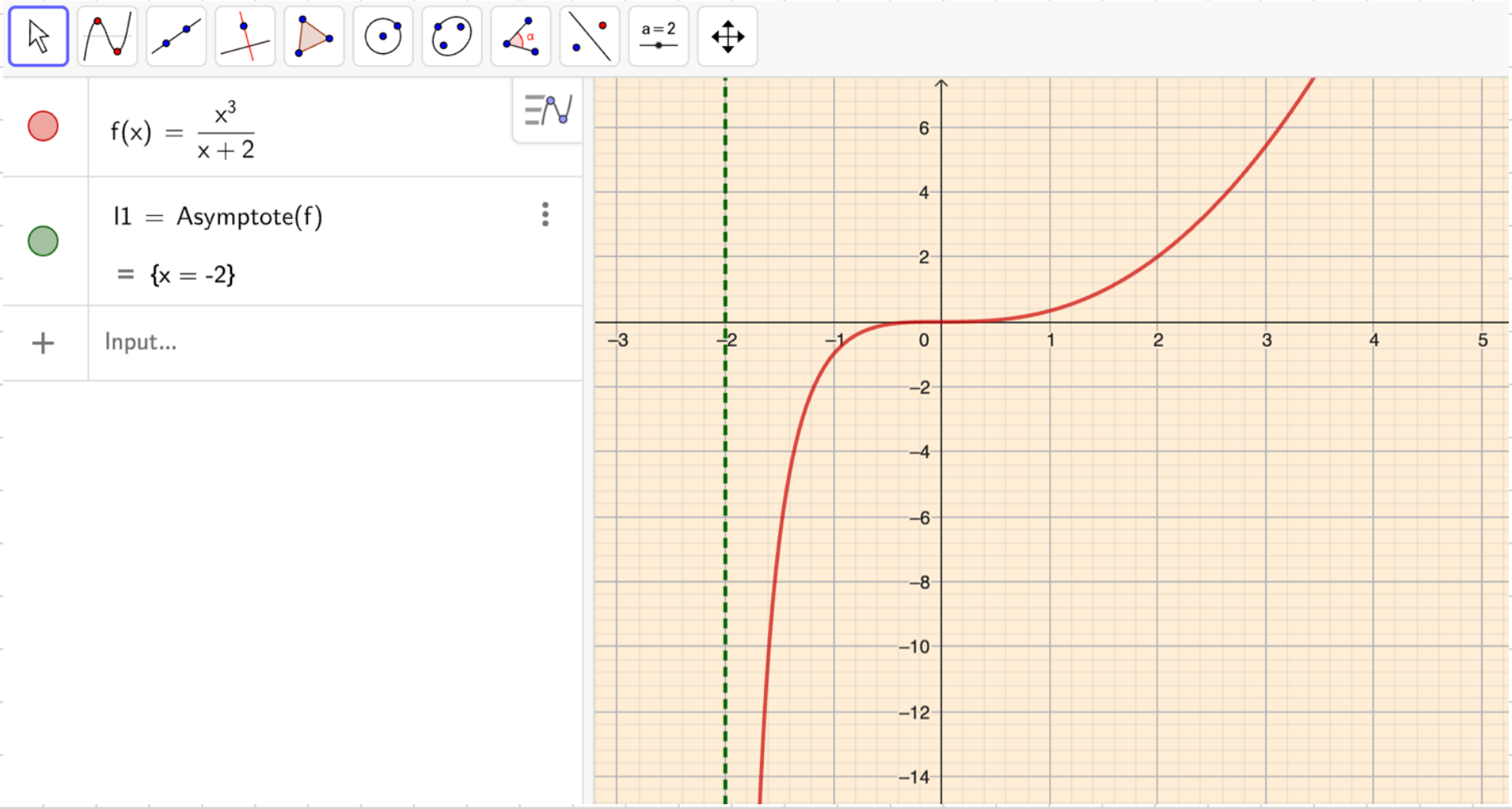
4215. $x = \dfrac{\pi}{2}$

Oändligt många

4216 Ange ett funktionsuttryck som beskriver en graf som har en vertikal asymptot men inte en horisontell asymptot.

4216.

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2}$$



4217 Linjen $y = a$, där a är en konstant, är en asymptot till kurvan $y = f(x)$.

Bestäm $\lim_{x \to \infty} (f(x) - a)$

4217.

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - a) = \lim_{x \to \infty} (a - a) = 0$$

4222 Givet att linjen $y = kx + m$ är en asymptot till kurvan $y = f(x)$. Bestäm

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$

b) $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$

c) $\lim_{x \to \infty} (f(x) - (kx + m))$

4222.

a) k

b) m

c) 0

4223 Bestäm samtliga asymptoter till kurvan

$$y = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$$

4223.

$$y = \frac{3(x^2-1)}{x-1} = \frac{3(x+1)(x-1)}{x-1} = 3x+3 \quad , \; x \neq 1$$

Asymptot: $y = 3x + 3$

4224 Kurvan $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ har en sned asymptot

a) Ange ekvationen för den sneda asymptoten.

b) Rita kurvan och asymptoten på din grafritande räknare.

4224.

a) Polynomdivision ger:

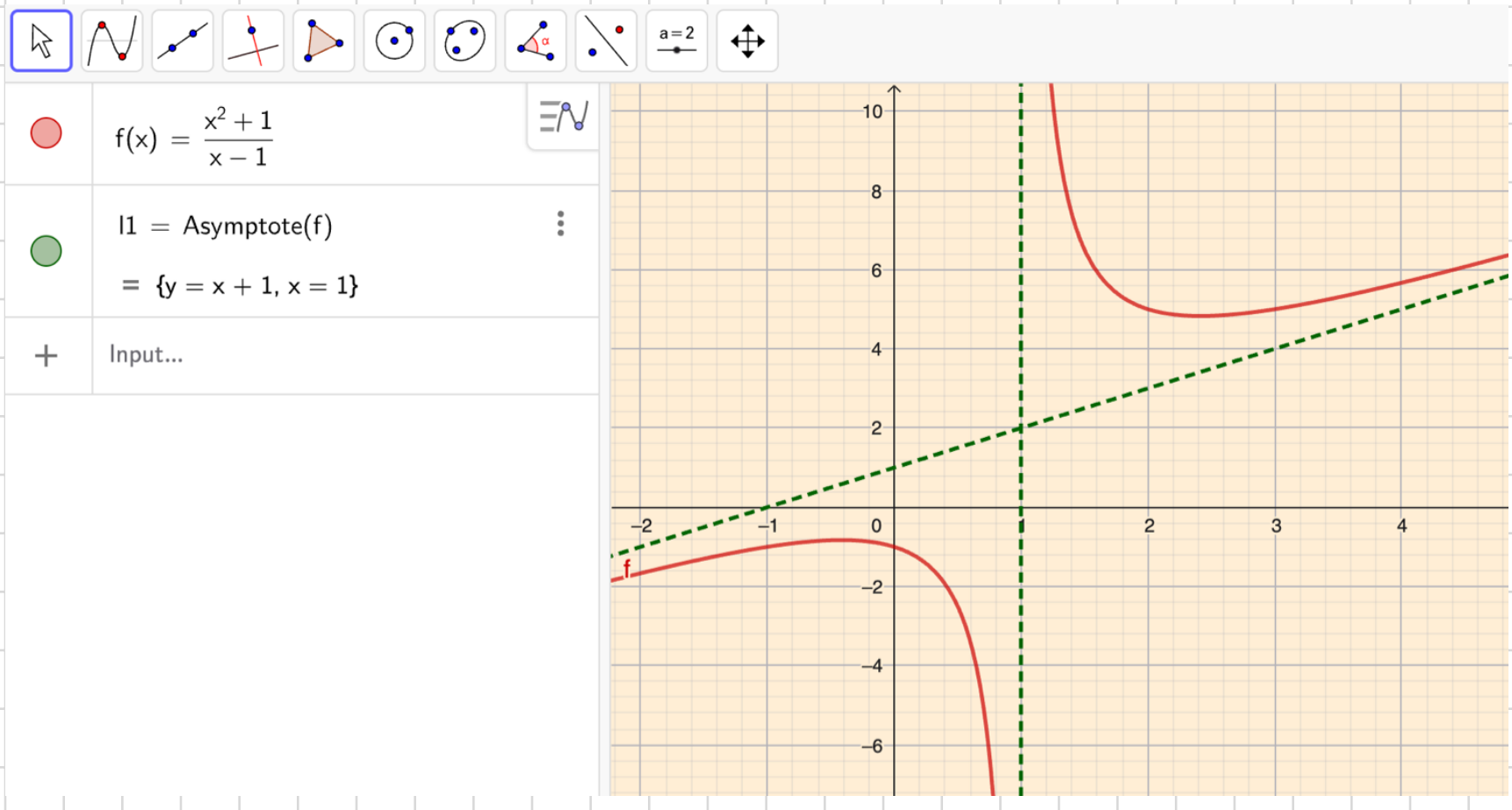
$$\begin{array}{r|l} x-1 & x^2+1 \\ -\,x^2+x & x+1 \\ \hline x+1 & \\ -\,x+1 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$y = x+1+\frac{2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}(x+1)$$

Den sneda asymptoten: $y = x+1$

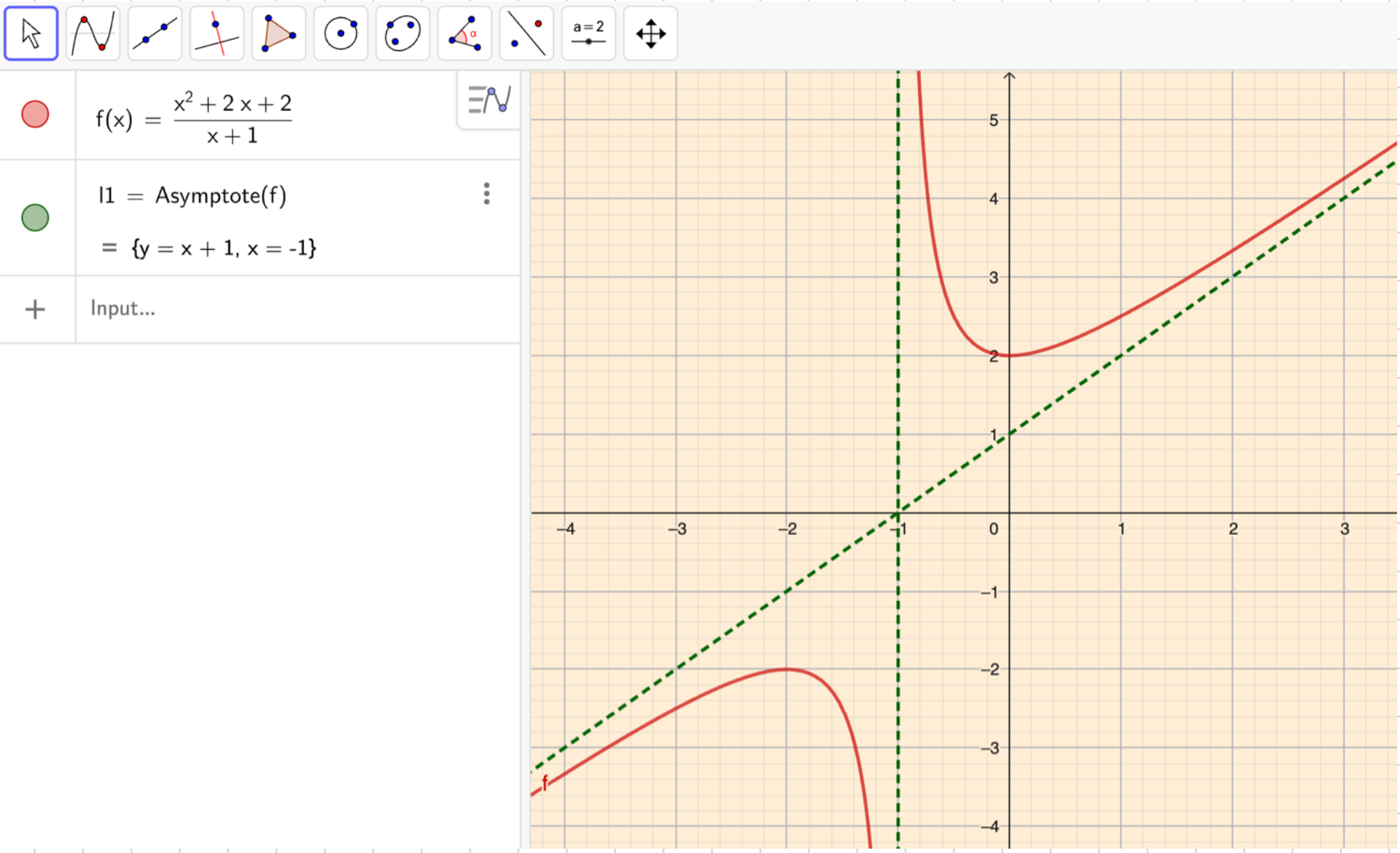
b)



4225 Ge ett exempel på en kurva $y = f(x)$ som har
Ö den vertikala asymptoten $x = -1$ och den sneda asymptoten $y = x + 1$.

4225.

$$x+1+\frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1)+x+1+1}{x+1} = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$$



4226 Bestäm samtliga asymptoter till kurvan

$y = f(x)$ om $f(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$

4226.

Polynomdivision ger:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x+3 \\ \cline{2-2} -(x^2+3x) & x-3 \\ \cline{1-1} -3x & \\ -(-3x-9) & \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

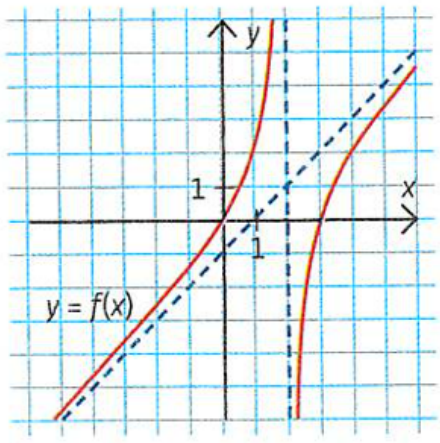
$$f(x) = x - 3 + \frac{9}{x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right) = \lim_{x\to\infty}(x-3)$$

$$\lim_{x\to -3} = \infty$$

Asymptoter: $x = -3$, $y = x - 3$

4227 I figuren är grafen till $y = \dfrac{x^2 + ax}{x + b}$ ritad tillsammans med sina asymptoter. Bestäm konstanterna a och b.



4227. $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 + ax}{x + b} \right) = \infty \Rightarrow \underline{b = -2}$

Polynomdivision ger:

$y = \dfrac{x^2 + ax}{x - 2}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + ax & x - 2 \\ \cline{2-2} -\,(x^2 - 2x) & x + (a+2) \\ \cline{1-1} (a+2)x & \\ -\,((a+2)x - 2a - 4) & \\ \cline{1-1} 2a + 4 & \end{array}$$

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} \left(x + a + 2 + \frac{2a+4}{x-2} \right) = \lim_{x \to \infty} (x + a + 2)$$

$$\lim_{x \to \infty} (x + a + 2) = \lim_{x \to \infty} (x - 1) \Rightarrow$$

$$x + a + 2 = x - 1 \Rightarrow \underline{a = -3}$$

4228 Grafen till $y = f(x)$ har den sneda asymptoten $y = kx + m$ om $\lim_{x \to -\infty} ((f(x) - (kx + m)) = 0$ eller $\lim_{x \to \infty} ((f(x) - (kx + m)) = 0$

a) Visa att asymptotens riktningskoefficient ges av gränsvärdet $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Med andra ord visa att $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$

b) Visa att y-koordinaten för asymptotens skärning med y-axeln ges av gränsvärdet $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$. Med andra ord visa att $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = m$.

4228. a) $\lim_{x \to \infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x) - \lim_{x \to \infty} (kx + m) = 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x) - \lim_{x \to \infty} kx - \lim_{x \to \infty} m = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \to \infty} k - \lim_{x \to \infty} \frac{m}{x} = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ #

b) $\lim_{x \to \infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$

$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) - \lim_{x \to \infty} m = 0$

$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = m$ #

4233 Givet $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x}{x^2}$

a) Bestäm den vertikala asymptoten till $y = f(x)$.

b) Bestäm den sneda asymptoten till $y = f(x)$.

c) Bestäm eventuella extrempunkter till f.

d) Skissa grafen $y = f(x)$.

4233. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$, $x \neq 0$

a) $x = 0$

b) $y = x$

c) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

Extrempunkter:

$x = -2$, $y = \dfrac{(-2)^2+4}{-2} = -4$

$x = 2$, $y = \dfrac{2^2+4}{2} = 4$

$(-2, -4)$ och $(2, 4)$

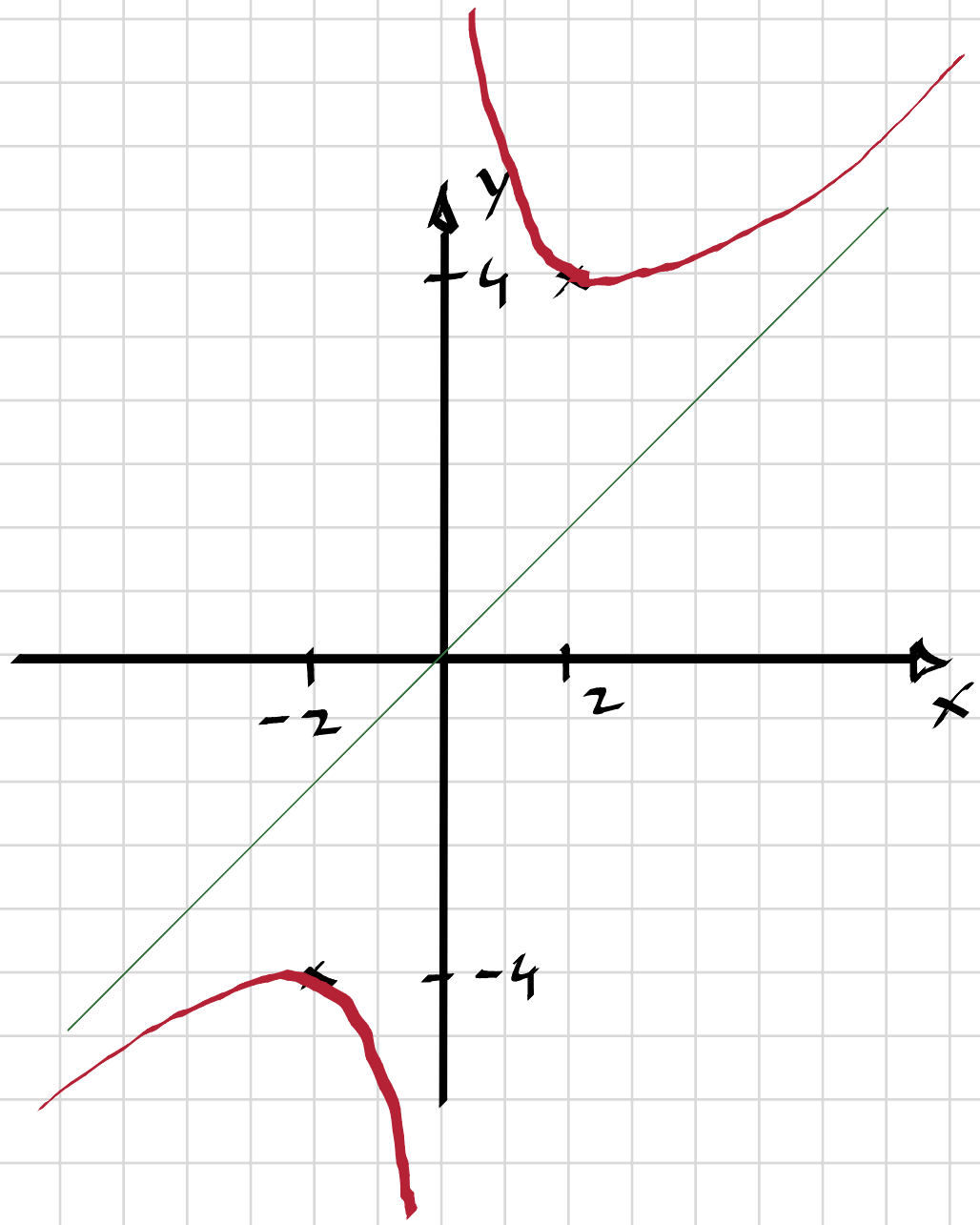
karaktär:

$f''(x) = \dfrac{8}{x^3}$

$f''(-2) = \dfrac{8}{(-2)^3} < 0 \Rightarrow$ maximum

$$f''(2) = \frac{8}{2^3} > 0 \Rightarrow \underline{\text{minimum}}$$

d)



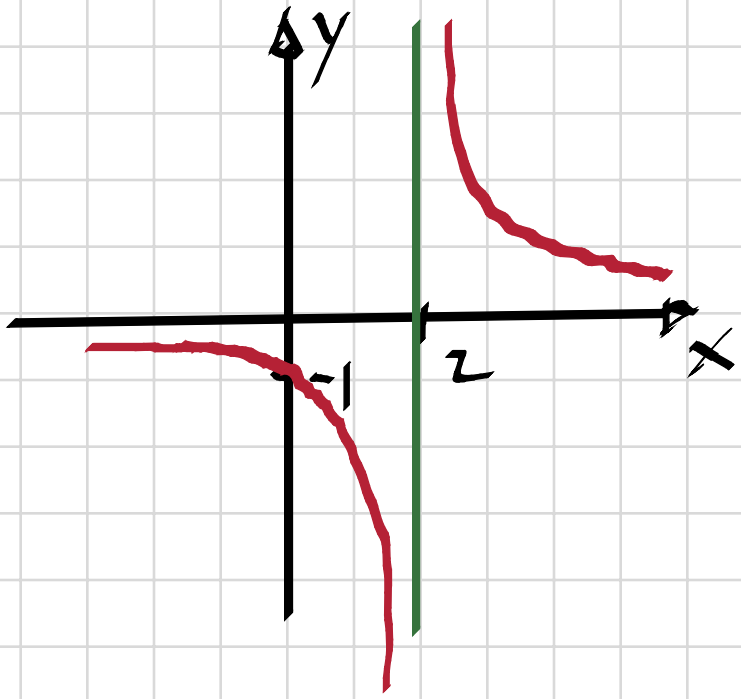
4234 Skissa grafen $y = f(x)$ om

a) $f(x) = \frac{2}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{3}{x+1} + 2$

4234.

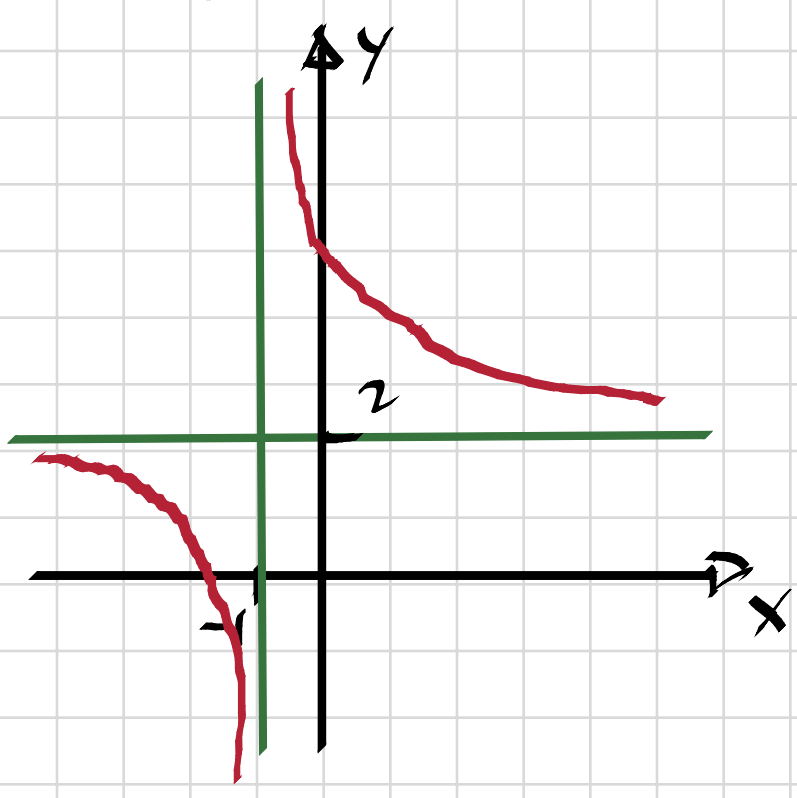
a) Asymptoter: $x = 2$, $y = 0$

$f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$ => extrempunkter saknas



b) Asymptoter: $x = -1$, $y = 2$

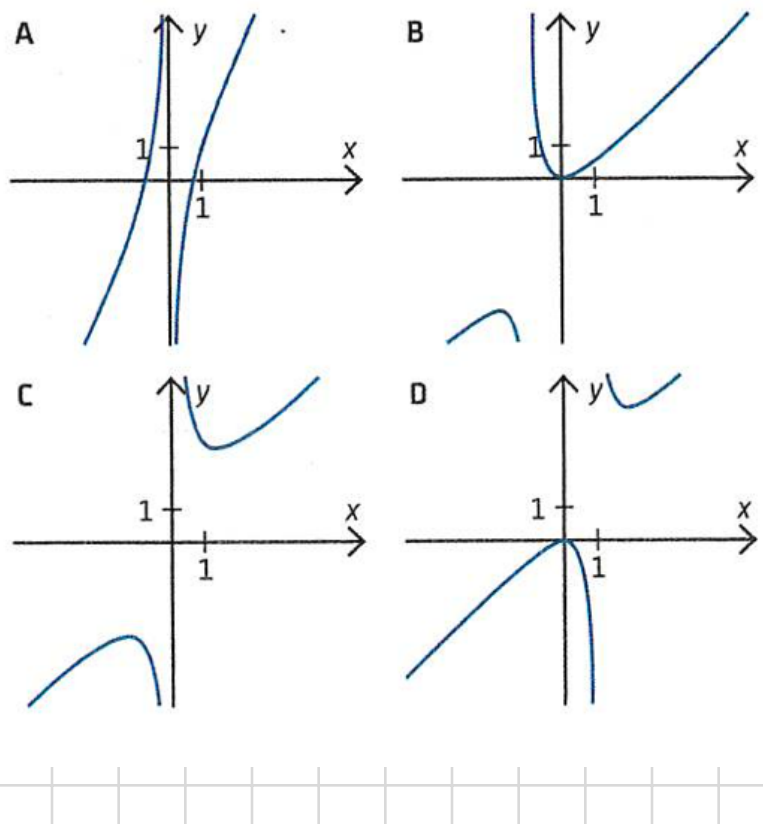
$f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$ => extrempunkter saknas

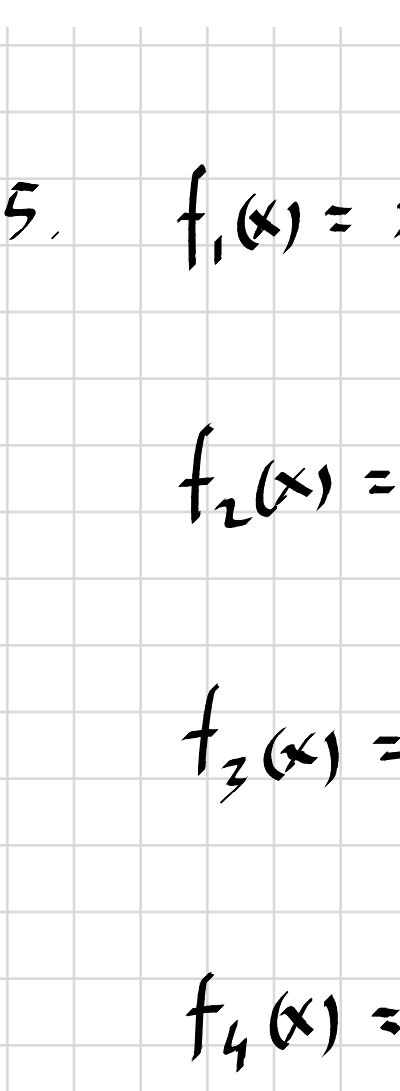


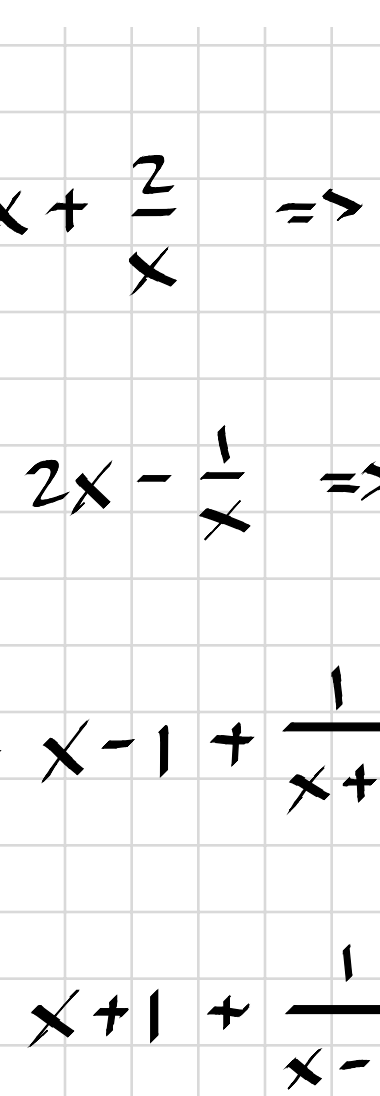
4235 Para ihop rätt funktionsuttryck med rätt graf.

1 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x}$ **2** $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$

3 $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$ **4** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$







4235. $f_1(x) = x + \dfrac{2}{x}$ => C

$f_2(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$ => A

$f_3(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ => B

$f_4(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ => D

4236 Skissa grafen till $y = f(x)$ om

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

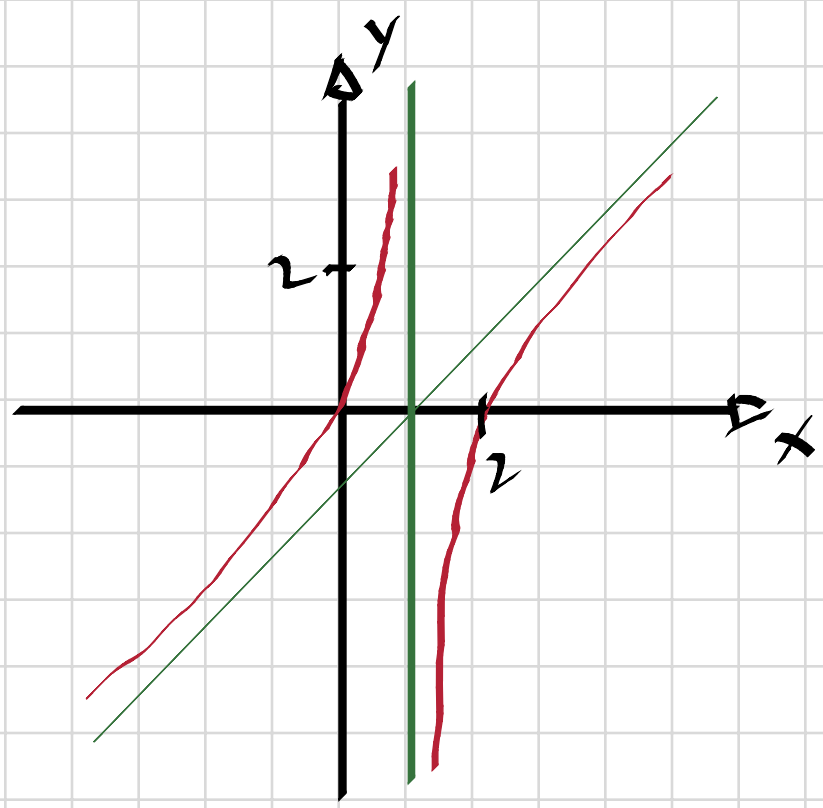
4236.

a) Polynomdivision ger:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x & x - 1 \\ \cline{2-2} -(x^2 - x) & \\ \cline{1-1} -x & \\ -(-x + 1) & \\ \cline{1-1} -1 & \end{array}$$

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-1}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow \text{extrempunkter saknas}$$



b) Polynomdivision ger:

$$
\begin{array}{r|l}
x-2 & x^2+1 \\
\cline{2-2}
 & x+2 \\
-\,(x^2-2x) & \\
\cline{1-1}
 & 2x+1 \\
-\,(2x-4) & \\
\cline{1-1}
 & 5
\end{array}
$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{5}{x-2}$$

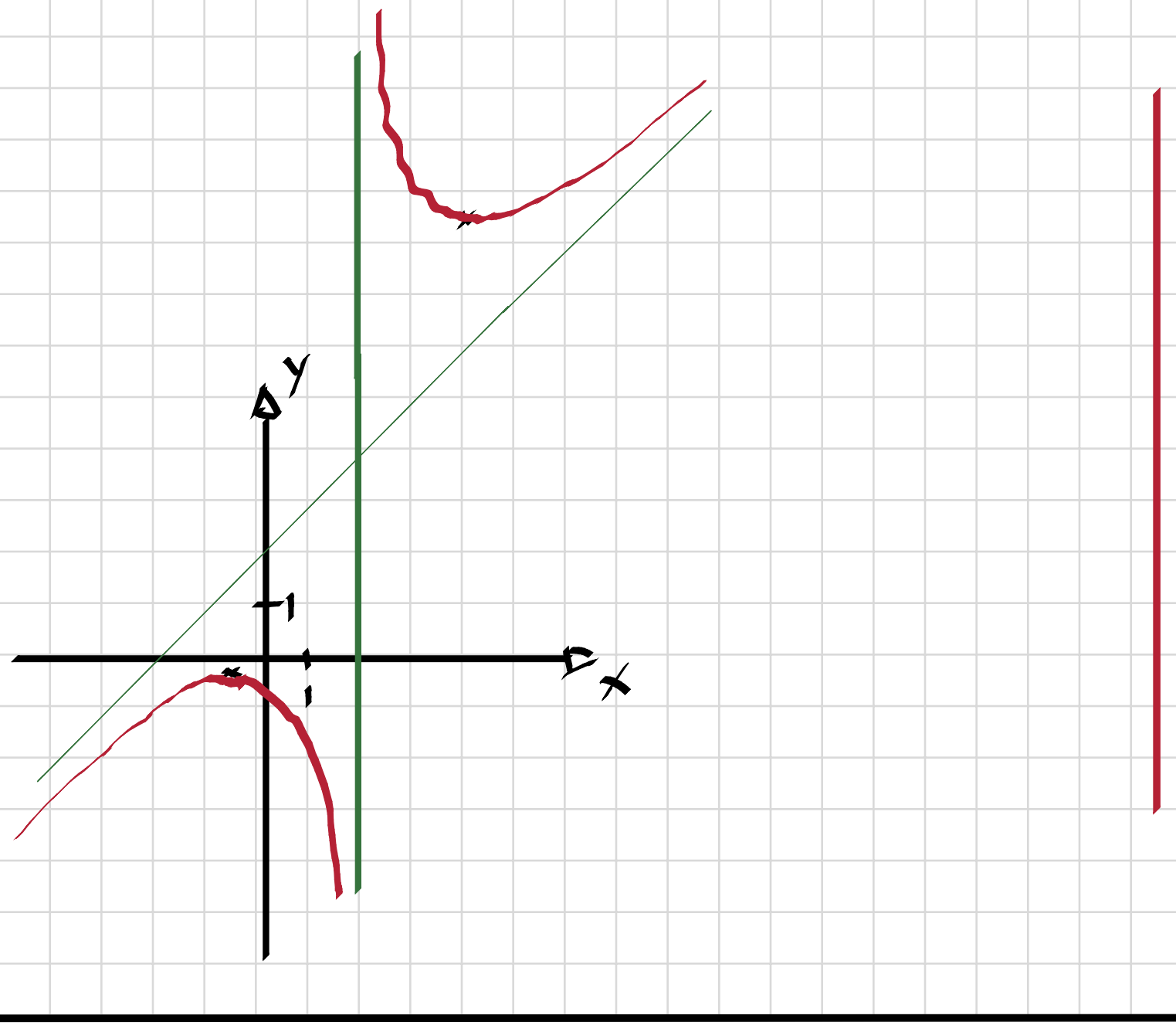
$$f'(x) = 1 - \frac{5}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 5 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

Extrempunkter:

$$x_1 \approx -0{,}24 \quad , \quad y \approx -0{,}24 + 2 + \frac{5}{-2{,}24} = -0{,}47$$

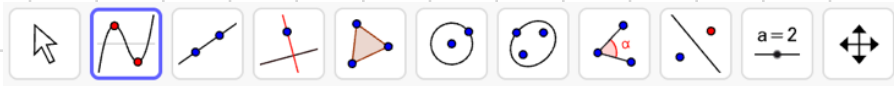
$$x_2 \approx 4{,}24 \quad , \quad y \approx 4{,}24 + 2 + \frac{5}{2{,}24} = 8{,}47$$

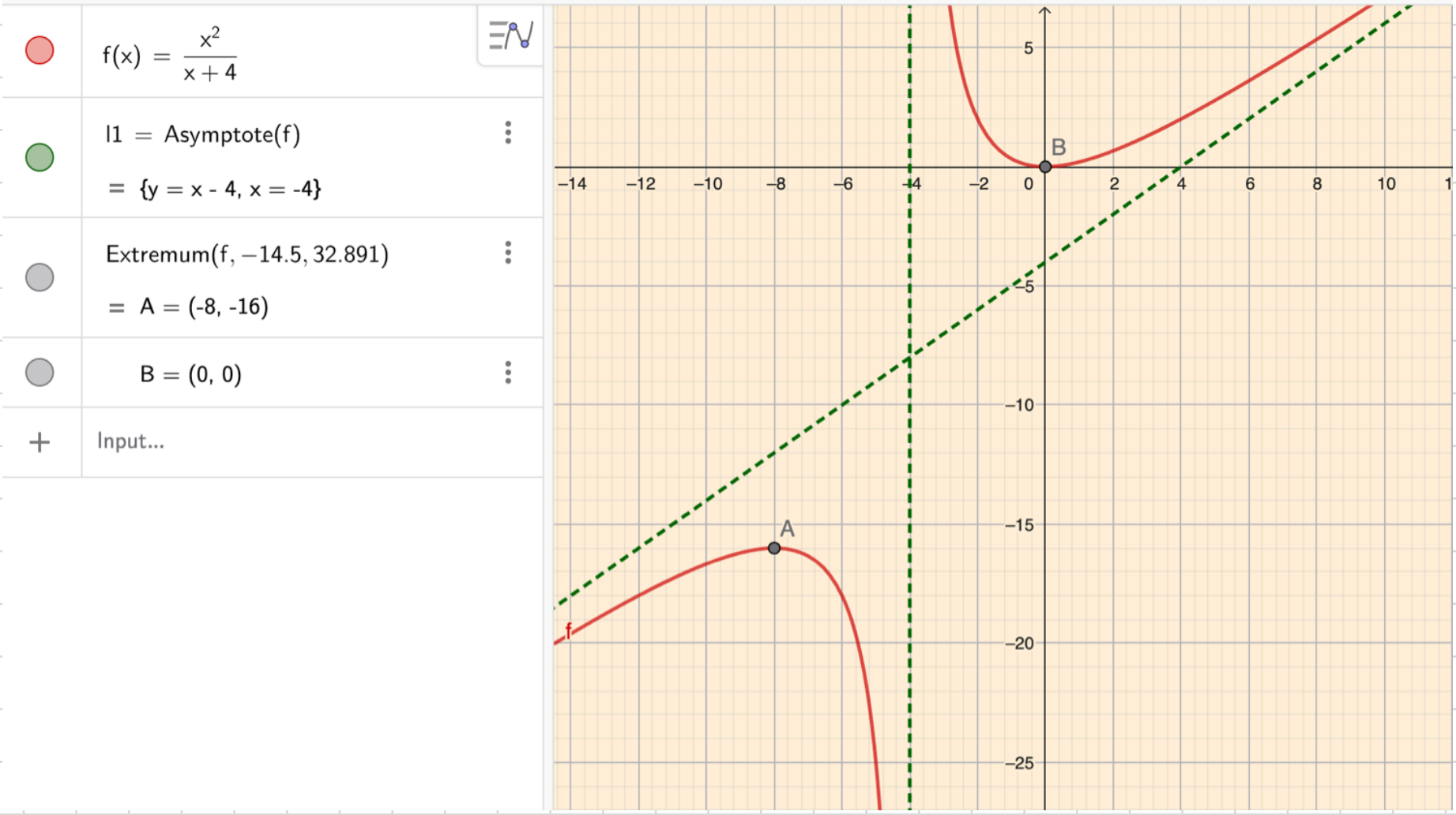


4237 **Ö** Ange ett funktionsuttryck som beskriver en graf med både en lokal maximipunkt och en lokal minimipunkt samt en vertikal asymptot med ekvationen $x = -4$.

4237.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+4}$$





4238 Skissa grafen till $y = f(x)$ om $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ och ange funktionens maximipunkt.

4238.

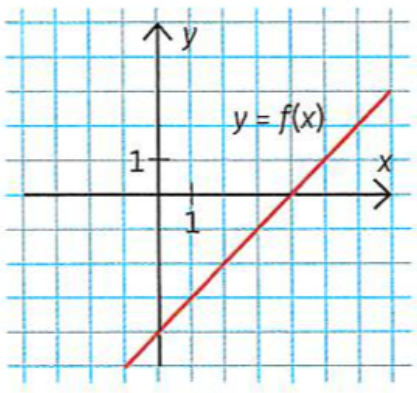
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x)^2}$$

Extrempunkt:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = -4$

4308 Grafen $y = f(x)$ är ritad i figuren. Bestäm samtliga primitiva funktioner till $f(x)$.



4308. $f(x) = x - 4 \Rightarrow$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + C$$

4309 Ange en primitiv funktion till följande funktioner

a) $f(t) = \dfrac{0{,}5 \sin t}{2} + 6\sqrt{t}$

b) $f(r) = 2\pi r - \pi r^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{5x + 2}$

4309.

a) $F(t) = 0{,}25 \cos t + 4t\sqrt{t}$

b) $F(r) = \pi r^2 - \dfrac{\pi r^3}{3}$

c) $F(x) = \ln x - \dfrac{\ln(5x+2)}{5}$

4310 Bestäm samtliga funktioner vars andraderivata är $f''(t) = 4\cos t + e^{3t}$

4310.

$$f'(t) = 4\sin t + \frac{e^{3t}}{3} + C_1$$

$$f(t) = -4\cos t + \frac{e^{3t}}{9} + C_1 t + C_2$$

4311 $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x) = e^{3x} - 1$.
Har $F(x)$ någon lokal extrempunkt i intervallet $-1 < x < 1$? Motivera ditt svar.

4311.

$$f(x) = 0 \Rightarrow e^{3x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'(x) = 3e^{3x}$$

$$f'(0) = 3 > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

Ja, F(x) har en ett lokalt minimum då $x = 0$

4312 Bestäm den tredjegradsfunktion $f(x)$ för vilken gäller att $f'(1) = f'(2) = 0$ samt $f'(0) = -4$ och $f(0) = 3$.

4312.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$

$f'(0) = -4 \Rightarrow c = -4$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b - 4 = 0$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b - 4 = 0$

$$\begin{cases} 12a + 8b - 16 = 0 \\ 12a + 4b - 4 = 0 \end{cases}$$

$$4b - 12 = 0$$

$$b = 3, \quad a = \frac{4 - 2 \cdot 3}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 3$$

4313 Bestäm $f(x)$ om vi vet att $f''(x) = x - 3$, $f'(0) = 2$ och $f(1) = \frac{5}{6}$

4313.

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + C_1$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

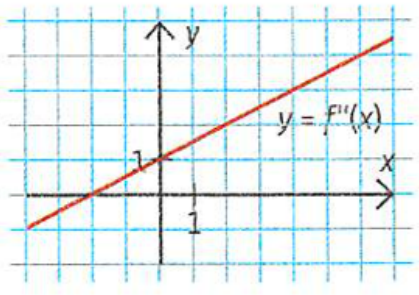
$$f'(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$f(1) = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1^3}{6} - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1 + C_2 = \frac{5}{6}$$

$$C_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{9}{6} - \frac{12}{6} = \frac{1}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{1}{6}$$

4314 Grafen $y = f''(x)$ är ritad i figuren. Ange funktionsuttrycket $f(x)$ till funktionen f.



4314.

$$f''(x) = \frac{x}{2} + 1$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{4} + x + C_1$$

$$f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

4327 Beräkna

a) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx$ b) $\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)^2 \, dx$

4327

a) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx =$

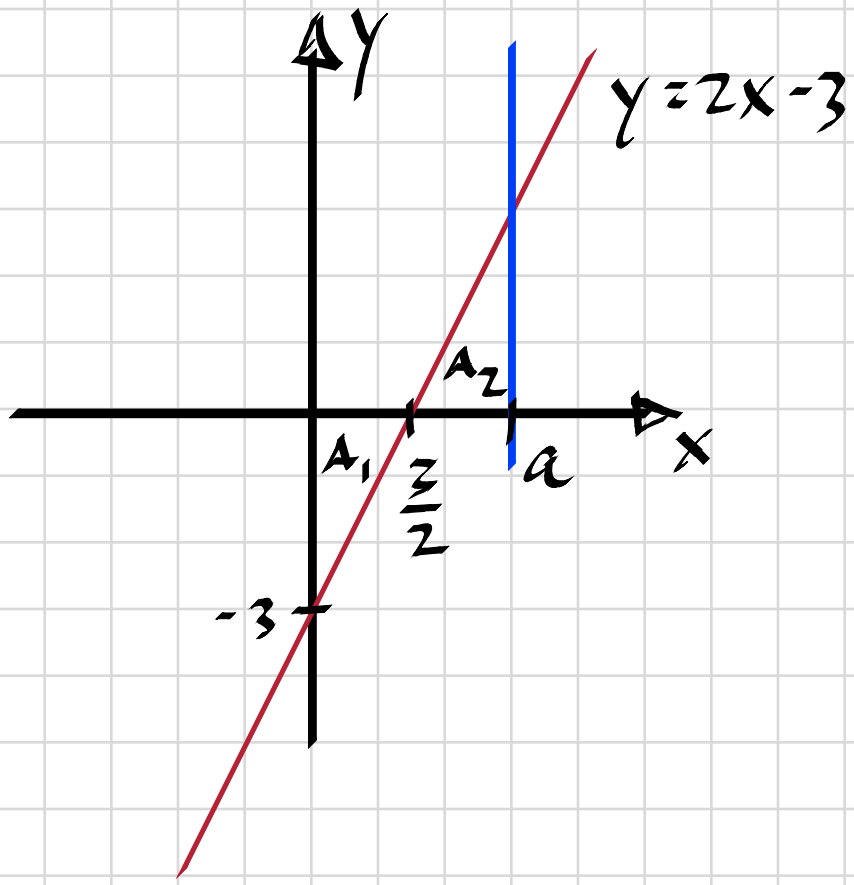
$= \frac{1}{4} \left[\cos 2x\right]_{\pi/2}^{0} = \frac{1}{4}(1 - (-1)) = \frac{1}{2}$

b) $\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x \sin x) dx$

$= \int_0^{\pi/4} (1 - \sin 2x) dx = \left[x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/4} =$

$= \frac{\pi}{4} + 0 - (0 + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

4328 Den räta linjen $y = 2x - 3$ begränsar två områden tillsammans med y-axeln, den positiva x-axeln och linjen $x = a$. Vilket värde har a om $a > 0$ och $\int_0^a (2x - 3)\,dx = 0$?

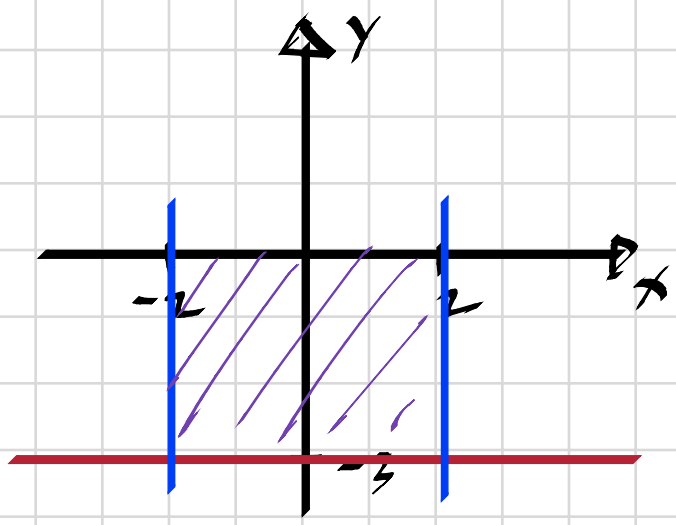


4328.

$A_1 = A_2 \Rightarrow$

$a = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

4329 Ö Ge exempel på en funktion f, så att $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx < 0$ och arean av området mellan funktionens graf, x-axeln samt linjerna $x = -2$ och $x = 2$ är större än noll.



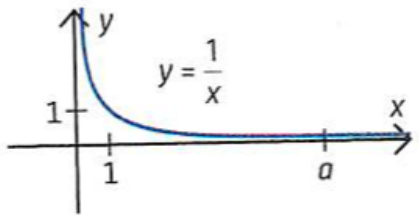
4329.

$f(x) = -3$

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = [-3x]_{-2}^{2} = -6 - 6 = -12$

(Arean = +12 a.e.)

4330 Bestäm talet a exakt, så att arean av det skuggade området blir 2 areaenheter.



4330.

$$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = 2$$

$$\left[\ln x\right]_1^a = 2$$

$$\ln a - 0 = 2$$

$$\underline{a = e^2}$$

4331 Beräkna

a) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$ b) $\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\,dx$

4331.

a) $$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x\,dx = \left[\ln(\cos x)\right]_{\pi/3}^{\pi/6} =$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\ln\sqrt{3}}$$

b) $$\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos 2x + 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x + x\right]_0^{\pi/2} = 0 + \frac{\pi}{4} - 0 - 0 = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

4337 Låt $f(x) = 3e^x - 2x$ och visa att

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx$$

4337.

$$VL = \int_0^5 (3e^x - 2x)\,dx = \left[3e^x - x^2\right]_0^5 = 3e^5 - 25 - 3 = 3e^5 - 28$$

$$HL = \int_0^2 (3e^x - 2x)\,dx + \int_2^3 (3e^x - 2x)\,dx + \int_3^5 (3e^x - 2x)\,dx =$$

$$\left[3e^x - x^2\right]_0^2 + \left[3e^x - x^2\right]_2^3 + \left[3e^x - x^2\right]_3^5 =$$

$$= 3e^2 - 4 - 3 + 3e^3 - 9 - 3e^2 + 4 + 3e^5 - 25 - 3e^3 + 9 =$$

$$= 3e^5 - 28 = VL \quad \#$$

4338 Olof säger att, eftersom integralberäkningar handlar om att ”bestämma en primitiv funktion till integranden”, så kan han bestämma $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ genom att t.ex. beräkna $[\ln x + 101]_1^3$

Har han rätt eller fel? Motivera ditt svar.

4338. Ja, han har rätt men konstanten 101 kan uteslämnas.

4339 Eleverna har fått i uppgift att beräkna $\int_1^e \frac{1}{4x}\,dx$.

Antonia har löst uppgiften enligt:

$$\int_1^e \frac{1}{4x}\,dx = \left[\frac{\ln 4x}{4}\right]_1^e = \frac{\ln 4e}{4} - \frac{\ln 4}{4} = \ln e - \frac{\ln 4}{4}$$

Klara har löst uppgiften enligt:

$$\int_1^e \frac{1}{4x}\,dx = \left[\frac{\ln x}{4}\right]_1^e = \frac{\ln e}{4} - \frac{\ln 1}{4} = \frac{\ln e}{4} = \frac{1}{4}$$

Vilken lösning är korrekt? Vilket eller vilka fel gjorde eleverna? Motivera ditt svar.

4339. Klaras lösning är korrekt.

Antonia har felaktigt satt $\frac{\ln 4e}{4} = \ln e$

4340 Visa att om $f(x)$ är kontinuerlig i $a \le x \le b$, så gäller att

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

4340.

$$VL = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$HL = -\int_b^a f(x)dx = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a) = VL$$

#

4241 Visa att för alla positiva tal a och b gäller

$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln kx]_a^b$ där $k > 0$ är konstant

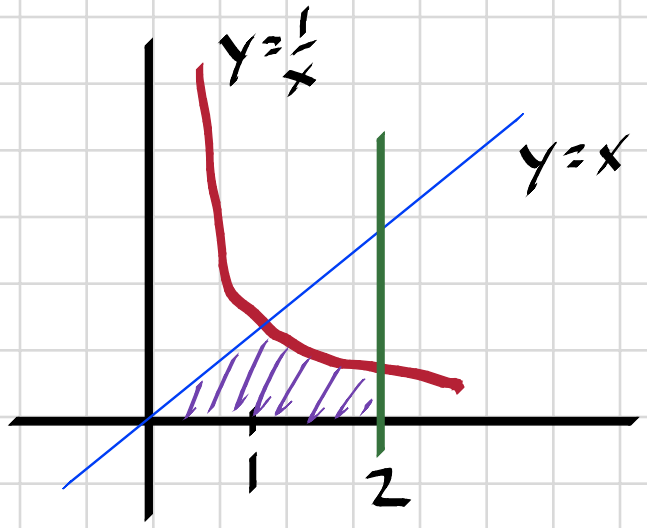
4241.

$$VL = \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b) - \ln(a) = \ln\frac{b}{a}$$

$$HL = \left[\ln kx\right]_a^b = \ln kb - \ln ka =$$

$$= \ln k + \ln b - (\ln k + \ln a) = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a} = VL \quad \#$$

4346 Bestäm arean av området som begränsas av kurvan $y = \frac{1}{x}$, x-axeln samt linjerna $y = x$ och $x = 2$.



4346.

$$A = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\ln x\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 2 \text{ a.e.}$$

4347 Beräkna arean av området som i intervallet $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ begränsas av kurvorna $y = \cos 2x$ och $y = \cos(2x + \pi)$.

4347.

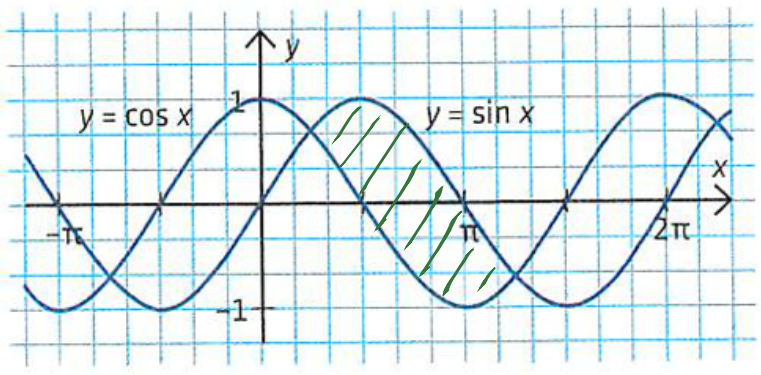
$$\cos(2x+\pi) = -\cos 2x \Rightarrow$$

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos 2x - \cos(2x+\pi))\,dx =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos 2x\,dx = 4 \cdot \int_{0}^{\pi/4} \cos 2x\,dx =$$

$$= 2\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = 2 \cdot 1 = \underline{2 \text{ a.e.}}$$

4348 Beräkna arean av det skuggade området. Svara exakt.



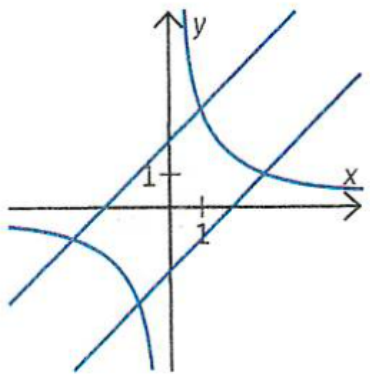
4348. Skärningspunkter:

$$\sin x = \cos x \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, \; x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (\sin x - \cos x)\,dx = \left[\cos x + \sin x\right]_{x_2}^{x_1} =$$

$$\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{2\sqrt{2} \text{ a.e.}}$$

4349 Det skuggade området begränsas av kurvan $y = \frac{3}{x}$ samt linjerna $y = x + 2$ och $y = x - 2$.
Beräkna arean av det skuggade området.



4349.

Skärningspunkter:

$\frac{3}{x} = x + 2$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x - 1)(x + 3) = 0$

$x_1 = -3, x_2 = 1$

$\frac{3}{x} = x - 2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x_3 = -1, x_4 = 3$

Symmetri ger:

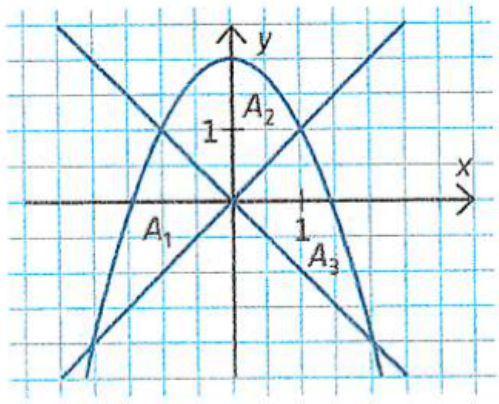
$$A = 2 \cdot \int_0^1 (x + 2 - (x - 2))\,dx + 2 \cdot \int_1^3 (\frac{3}{x} - (x - 2))\,dx =$$

$$= 2 \cdot [4x]_0^1 + 2 \cdot [3\ln x - \frac{x^2}{2} + 2x]_1^3 =$$

$$= 2 \cdot 4 + 2(3\ln 3 - \frac{9}{2} + 6 + \frac{1}{2} - 2) =$$

$$= 8 + 6\ln 3 - 9 + 12 + 1 - 4 = 8 + 6\ln 3 \text{ a.e.}$$

4350 Figuren visar graferna som hör till $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = -x$ och $h(x) = x$.



a) Beräkna arean av område A_1.

b) Beräkna arean av område A_2.

c) Beräkna arean av område A_3.

4350.

a)

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (f(x) - h(x))\,dx + \int_{-1}^{0} (g(x) - h(x))\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} (2 - x^2 - x)\,dx + \int_{-1}^{0} (-x - x)\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \left[x^2\right]_{-1}^{0} =$$

$$= -2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) + 1 = 5 - \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{30 - 14 - 3}{6} = \frac{13}{6}\ \text{a.e.}$$

b)

$$A_2 = 2\int_{0}^{1} (f(x) - h(x))\,dx = 2\int_{0}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} =$$

$$= 2\cdot\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{12 - 2 - 3}{6} = \frac{14}{6}\ \text{a.e.}$$

c) Symmetri $\Rightarrow A_3 = A_1 = \frac{13}{6}$ a.e.

4355 Accelerationen a m/s^2 för en motorcykel kan under en kort tidsperiod beskrivas med $a(t) = 1{,}8t + 4$, där t är tiden räknat i sekunder från accelerationens början. Motorcykelns hastighet och position i början av tidsperioden är $v(0) = 3$ m/s respektive $s(0) = 29$ m.

a) Bestäm funktionen $s(t)$ som beskriver positionen hos motorcykeln under tidsperioden.

b) För vilka värden på t är det rimligt att formeln gäller?

4355

a) $a(t) = 1{,}8t + 4$

$v(t) = \int a(t)\,dt = 0{,}9t^2 + 4t + C_1$

$v(0) = 3 \Rightarrow v(t) = 0{,}9t^2 + 4t + 3$

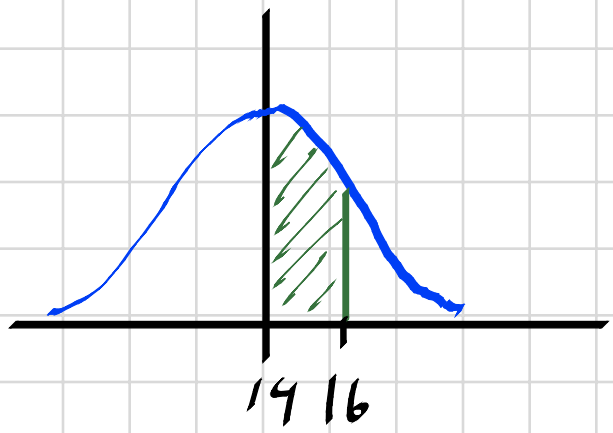
$s(t) = \int v(t)\,dt = 0{,}3t^3 + 2t^2 + 3t + C_2$

$s(0) = 29 \Rightarrow s(t) = 0{,}3t^3 + 2t^2 + 3t + 29$

b) $t = 7$ s ger en topphastighet

$v(7) = 0{,}9 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 3 = 75{,}1$ m/s $= 270$ km/h

4356 Drifttiden för en viss typ av batterier är normalfördelad med medelvärdet $\mu = 14$ h och standardavvikelsen $\sigma = 1{,}7$ h. Beräkna sannolikheten att ett slumpvis valt batteri har en drifttid på mellan 14 h och 16 h.

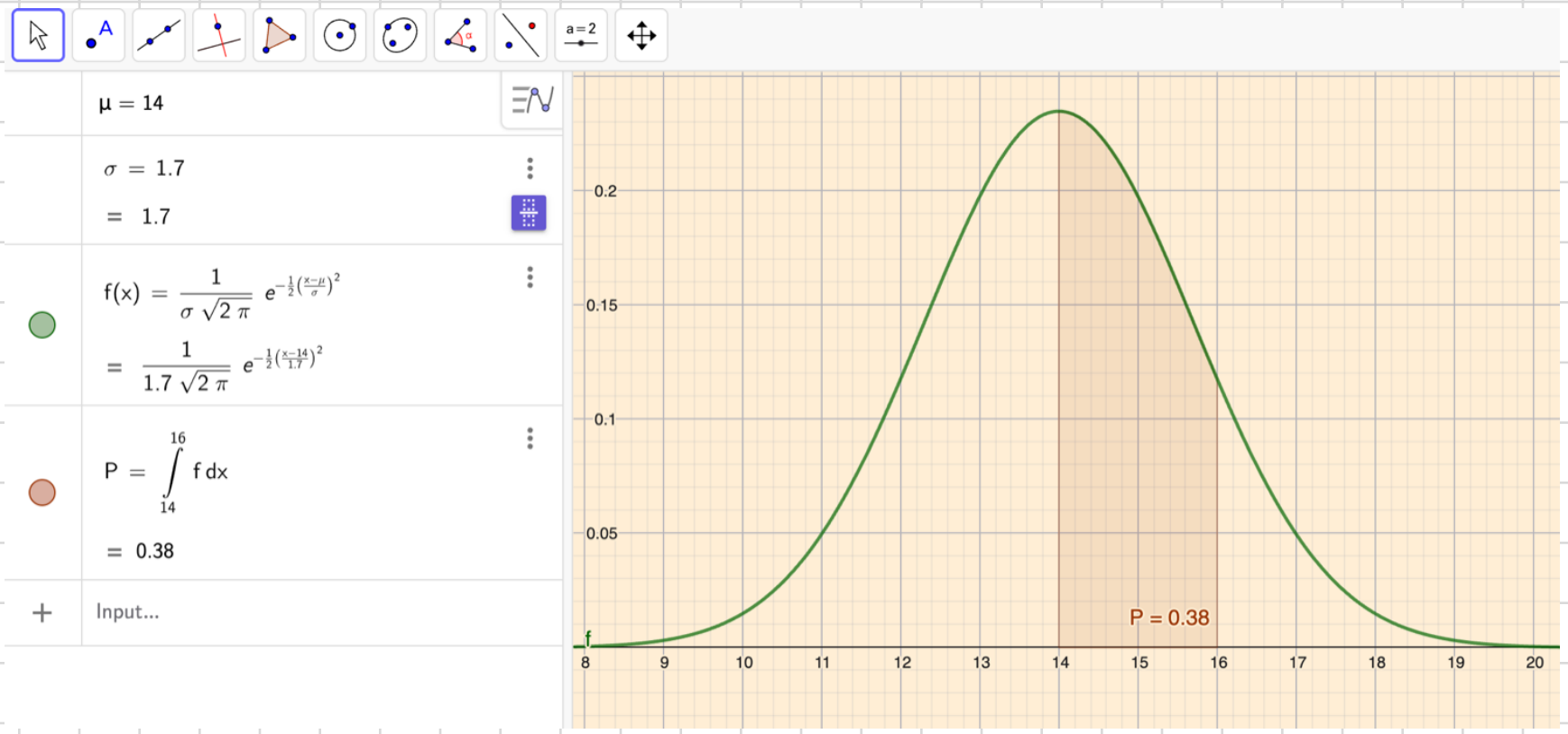


4356.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$P = \int_{14}^{16} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{14}^{16} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-14}{1.7}\right)^2} dx$$

Lösning i Geogebra ger: $P = 38\,\%$



Approximativ lösning:

14 - 16 h motsvarar drygt 1σ,

Avläsning av normalfördelningskurvan $\Rightarrow P \approx 40\,\%$

4357 Trafikflödet in till en tätort kan approximativt beskrivas med följande matematiska modell

$$y = 108 \sin \frac{\pi x}{12} + 320$$

där y är antalet bilar/timme och x är antalet timmar efter klockan 7.00. Hur många bilar passerar in till tätorten mellan klockan 7.00 och 17.00?

(*Np MaD ht 1997*)

4357.

$$\text{Antalet bilar} = \int_0^{10} y\,dx = \left[320x - \frac{108 \cdot 12}{\pi} \cos \frac{\pi x}{12} \right]_0^{10} =$$

$$= 3200 - 413 \cos \frac{\pi}{1,2} + 413 = 4000 \text{ st}$$

4358 För ett normalfördelat material beskriver integralen

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} dz$$

sannolikheten att ett slumpvis valt värde ligger i intervallet $a \le z \le b$. Tolka med ord värdet av integralerna

a) $A_1 = \int_{-\infty}^{7} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-7}{\sigma}\right)^2} dz$

b) $A_2 = \int_{7}^{\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-7}{\sigma}\right)^2} dz$

c) Vad är värdet av $A_1 + A_2$?

a) $P(X \le \mu) = 50\%$

b) $P(X \ge \mu) = 50\%$

c) 100 %

4359 När Gabriella försöker beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx$ på grafräknaren, visar den ERROR. Förklara varför integralen inte går att beräkna.

4359.

$$\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx = \left[\ln(\cos x)\right]_{\pi/2}^{0} = -\ln 0$$ vilket är odefinierat. $\left(\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty\right)$

4360 Den kraft F som två kroppar med massorna M och m påverkar varandra med ges av Newtons gravitationslag:

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

där r är avståndet mellan kropparnas tyngdpunkter och G är den så kallade gravitationskonstanten som har värdet $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$.

Arbetet att förflytta en kropp från r_1 till r_2 ges av integralen

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r) \, dr$$

a) Rymdstationen ISS befinner sig i genomsnitt ca 420 km ovan jorden. Beräkna arbetet att från jorden lyfta en astronaut med vikten 86 kg till rymdstationen. Jordens massa är ca $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg och radien är ca 6 400 km.

b) Låt r_1 vara jordens radie. Undersök värdet av integralen $W = \int_{r_1}^{r_2} F(r) \, dr$ när $r_2 \to \infty$.

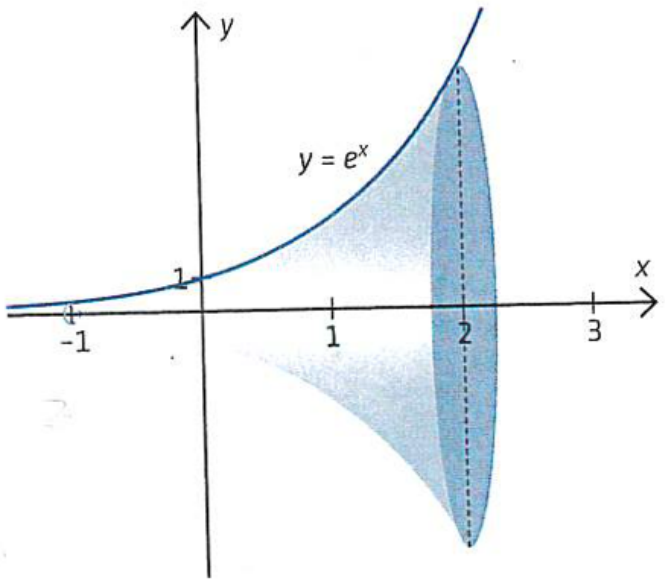
4360

a) $W = GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = GMm \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_{r_2}^{r_1} = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$

$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 86 \cdot \left(\frac{1}{6{,}40 \cdot 10^6} - \frac{1}{6{,}82 \cdot 10^6}\right) = 330 \text{ MJ}$.

b) $W_\infty = GMm \int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{GMm}{r_1} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 86}{6{,}40 \cdot 10^6} = 5350 \text{ MJ}$

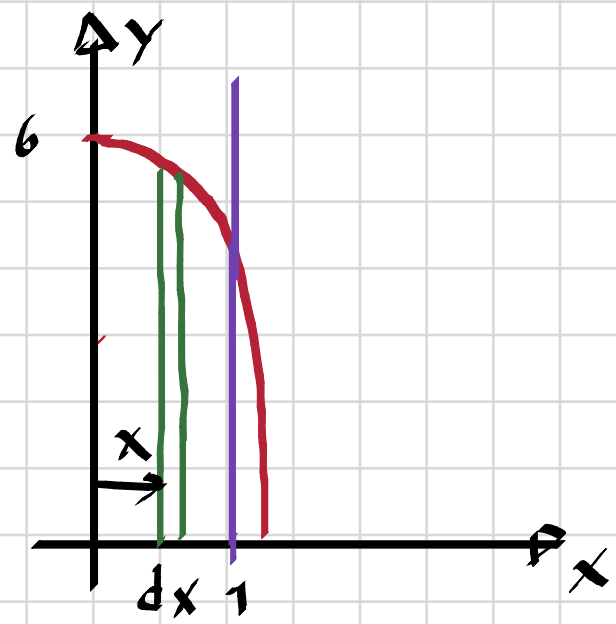
4366 Beräkna rotationskroppens volym.



4366.

$$V = \int dV = \int_{-\infty}^{2} \pi y^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{2} e^{2x} dx = \frac{\pi}{2}\left(e^4 - e^{-\infty}\right) = \frac{\pi e^4}{2} \text{ v.e.}$$

4367 Området som begränsas av kurvan $y = 6 - x^2$, de positiva koordinataxlarna och linjen $x = 1$ roterar kring x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym.



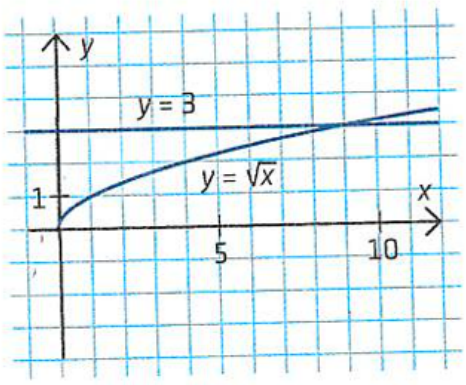
4367.

$$V = \int dV = \int_{0}^{1} \pi y^2 dx = \pi \int_{0}^{1} (6 - x^2)^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \int_{0}^{1} (36 - 12x^2 + x^4) dx = \pi \cdot \left[36x - 4x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(36 - 4 + \frac{1}{5}\right) = \pi \cdot \frac{32 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{161\pi}{5} \text{ v.e.}$$

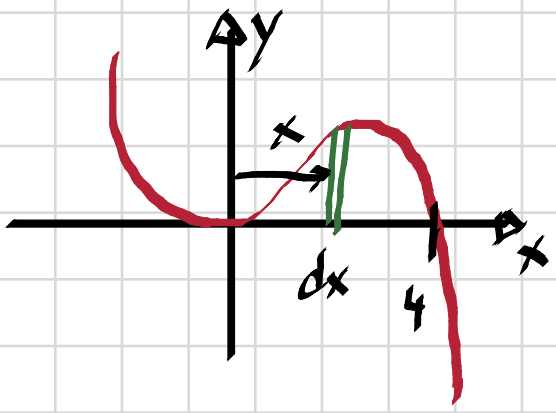
4368 Det skuggade området roterar kring x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym.



4368.

$$V = \int dV = \int_0^9 \pi(3^2 - x)\,dx = \pi \cdot \left[9x - \frac{x^2}{2}\right]_0^9 = \pi \cdot \left(81 - \frac{81}{2}\right) = \frac{81\pi}{2} \text{ v.e.}$$

4369 Kurvan som bestäms av funktionen $y = 4x^2 - x^3$ roterar kring x-axeln. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas mellan funktionens nollställen.



4369.

$$y = 4x^2 - x^3 = x^2(4 - x)$$

Nollställen: $x = 0$, $x = 4$

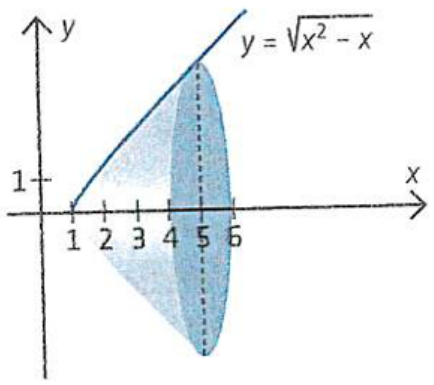
$$V = \int dV = \int_0^4 \pi y^2\,dx = \pi \int_0^4 (4x^2 - x^3)^2\,dx =$$

$$= \pi \int_0^4 (16x^4 - 8x^5 + x^6)\,dx = \pi \cdot \left[\frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7\right]_0^4 =$$

$$= \pi\left(\frac{1024}{5} - \frac{16384}{3} + \frac{16384}{7}\right) = \pi \cdot \left(\frac{344064 - 573440 + 245760}{105}\right)$$

$$= \frac{16384\pi}{105} \text{ v.e.}$$

4370 Beräkna rotationskroppens volym.



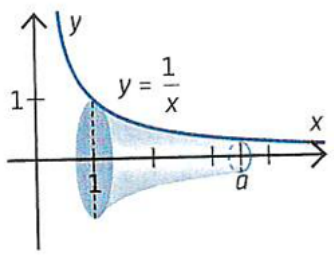
4370

$$V = \int dV = \int_1^5 \pi y^2 dx = \pi \int_1^5 (x^2 - x)\, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^5 = \pi \left(\frac{125}{3} - \frac{25}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{124}{3} - \frac{24}{2} \right) = \pi \cdot \frac{248 - 72}{6} = \frac{88\pi}{3} \text{ v.e.}$$

4371 Kurvan $y = \frac{1}{x}$ roterar kring x-axeln.



a) Beräkna den markerade volymen om $a = 2$.

b) Beräkna ett värde på a som gör att rotationskroppens volym blir 2 volymenheter.

c) Föreställ dig att punkten a förflyttas så långt som möjligt längs x-axeln. Det betyder att rotationskroppen blir oändligt lång. Visa att rotationskroppens volym inte kan bli större än π volymenheter.

4371.

a) $V = \int_1^a \pi \cdot y^2 = \pi \cdot \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{x} \right]_a^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right)$

$a = 2 \Rightarrow V = \pi \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} \text{ v.e}}}$

b) $\pi \left(1 - \frac{1}{a}\right) = 2 \Rightarrow$

$\frac{1}{a} = 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi}$

$a = \underline{\underline{\frac{\pi}{\pi - 2}}}$

c) $\lim_{a \to \infty} \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi$ #

4372 Kurvan $y = \sin x + \cos x$ roterar kring x-axeln i intervallet $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, beräkna rotationskroppens volym exakt med hjälp av primitiva funktioner.

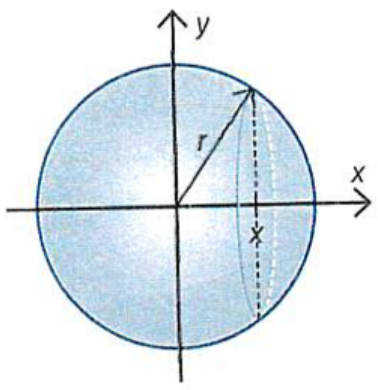
4372.

$$V = \int dV = \int \pi y^2 dx = \pi \cdot \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^{\pi/2} (1 + \sin 2x) dx = \pi \cdot \left[x - \frac{1}{2}\cos 2x \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \left(0 - \frac{1}{2}\right) \right) = \pi \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \text{ v.e.}$$

4273 Visa med hjälp av primitiva funktioner att volymen av ett klot med radien r är $V = \frac{4\pi r^3}{3}$



$$y^2 = r^2 - x^2$$

4273.

$$V = 2 \cdot \int_0^r \pi y^2 dx = 2\pi \cdot \int_0^r (r^2 - x^2) dx =$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{3r^3 - r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \quad \#$$