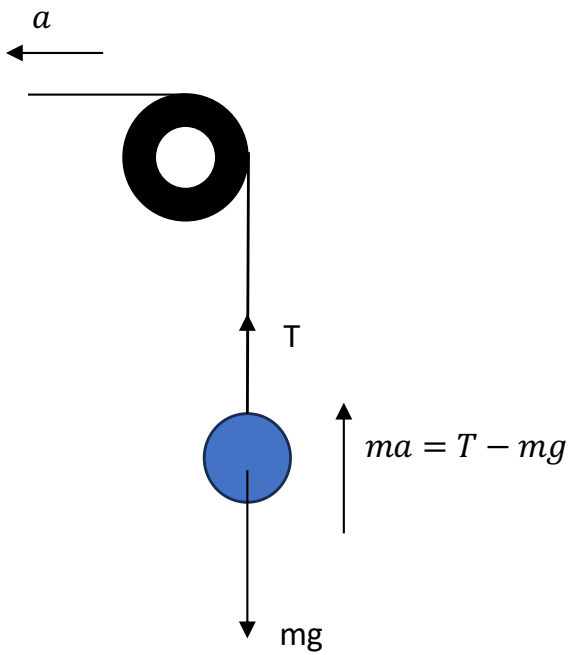
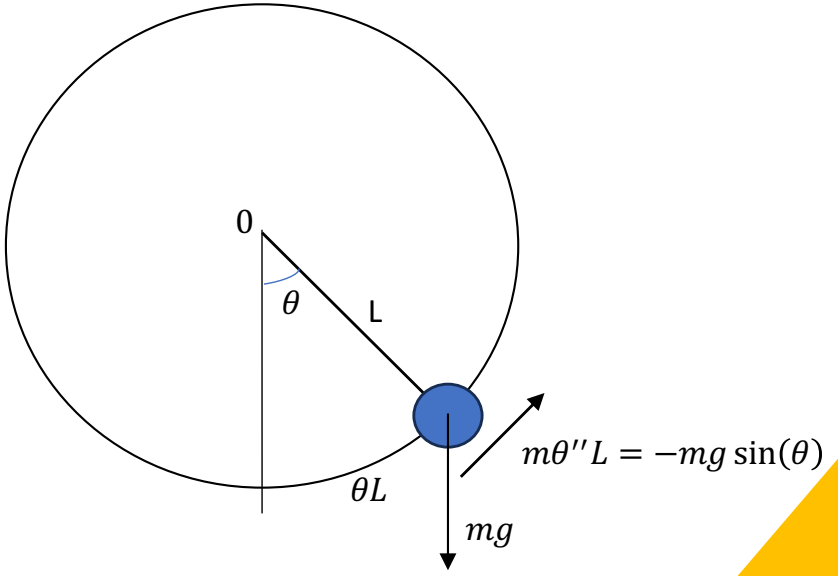
Matematisk pendel

En jämförelse med det linjära fallet

Linjär rörelse



Cirkulär rörelse (pendel)



$$M_0 = \mathrm{m}L^2\theta''$$

*) Notera att bågens längd kan tecknas som θL om vinkeln är i radianer. Accellerationen i tangentiell riktning blir då andraderivatan av bågens längd. Vridmomentet i pendelns infästning är kraften gånger hävarmen L och kan således tecknas som $M = mL^2\theta''$

Matematisk pendel (forts)

I en matematisk pendel är massan koncentrerad till stångens ände, d v s stångens massa betraktas som försumbar (till skillnad från en så kallad fysikalisk pendel där stångens massa inkluderas).
Periodtiden för en matematisk pendel är oberoende av massan, vilket innebär att den endast påverkas av stångens längd.

$$M = -mgsin(\theta) \cdot L$$

$$mL^2\theta'' = -mgsin(\theta) \cdot L$$

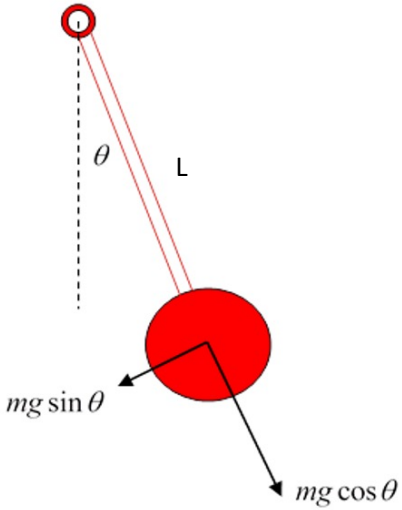
$$mL^2\theta'' + mgLsin(\theta) = 0$$

$$mL(L\theta'' + gsin(\theta) = 0$$

För små vinklar gäller $sin(\theta) = \theta \quad \Rightarrow$

$$mL(L\theta'' + g\theta) = 0$$

$$\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$$



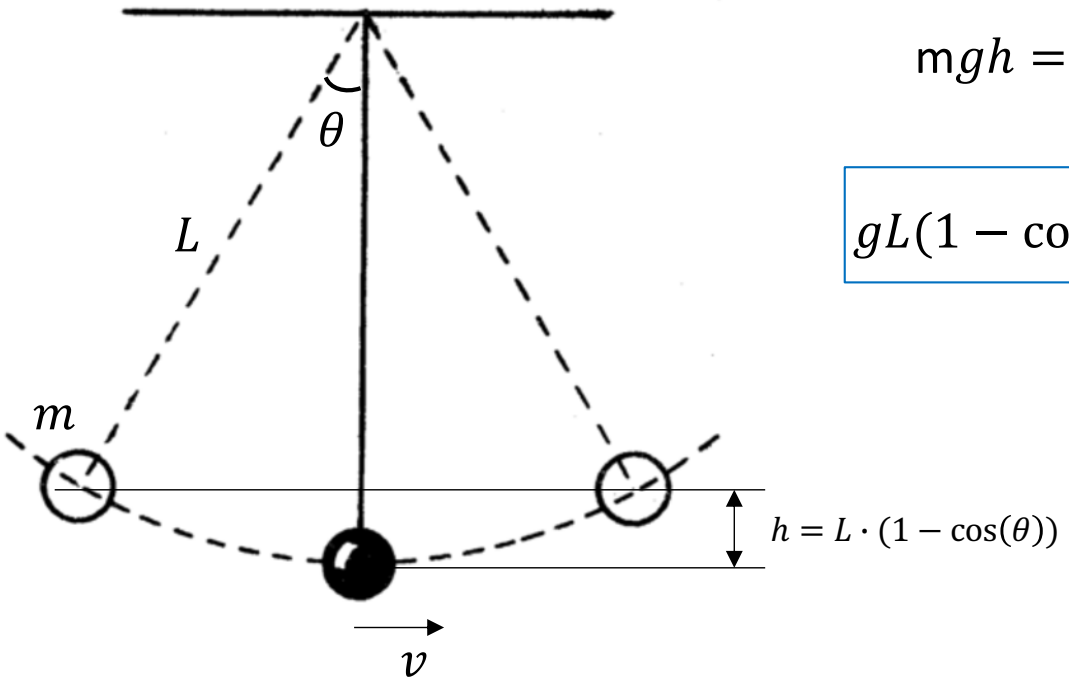
Jmf. med ekv. för den linjära fjädern: $y'' + \frac{k}{m}y = 0$ som ger $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ =>

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Energins bevarande

Som tidigare redovisats i Fysik 1 gäller naturligtvis energins bevarande även för en pendelrörelse.

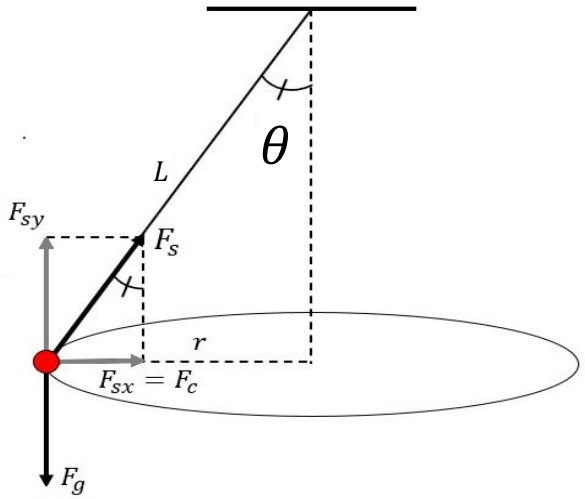


$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$gL(1-\cos(\theta)) = \frac{1}{2}v^2$$

Konisk pendel

Om pendeln istället roterar horisontellt med konstant hastighet blir periodtiden T även här oberoende av massan.



$$F_s = \frac{mg}{\cos(\theta)} \qquad \Rightarrow F_{sx} = \frac{mg}{\cos(\theta)} \cdot \sin(\theta)$$

$$F_C = m\omega^2 r = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot Lsin(\theta)$$

$$F_C = F_{sx} \quad \Rightarrow \quad m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot Lsin(\theta) = \frac{mg}{\cos(\theta)} \cdot \sin(\theta)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Lcos(\theta)}{g}}$$