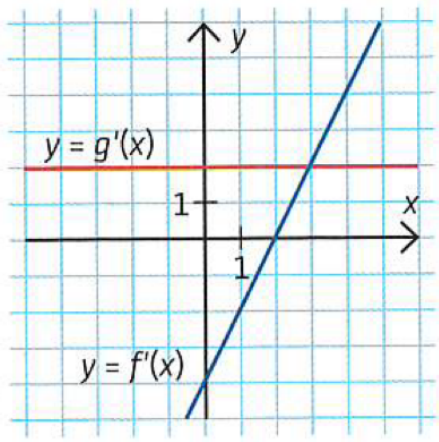
3111 Figuren visar derivatorna $y = f'(x)$ och
ö $y = g'(x)$. Ge förslag på två funktionsuttryck som beskriver f respektive g.



3111.

$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow$

$f(x) = x^2 - 4x + C$ ex. v $f(x) = x^2 - 4x$

$g'(x) = 2 \Rightarrow$

$g(x) = 2x + C$ ex. v $g(x) = 2x$

3112 Bestäm konstanten a så att så att $f'(2) = 0$ för $f(x) = x^2 + ax - 10$

3112.

$f'(x) = 2x + a$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 + a = 0 \Rightarrow a = -4$

3113 Givet $y = 4x^2 + e^{4z}$. Bestäm

a) $\frac{dy}{dx}$ b) $\frac{dy}{dz}$

3113.

a) $\frac{dy}{dx} = 8x$

b) $\frac{dy}{dz} = 4e^{4z}$

3114 Bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = x^2 + 3$

c) $f(x) = x^3 - 2$

3114. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = \underline{2}$

b) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 3 - x^2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \underline{2x}$

c) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - 2 - x^3 + 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \underline{3x^2}$

3115 Använd derivatans definition för att bestämma $f'(1)$ när $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

3115.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) + 1 - x^2 + 3x - 1}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} = 2x - 3$

$f'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

3116 Ge förslag på ett funktionsuttryck $f(x)$ så att
ö $f'(2)$ är

a) 5 b) $3e^6$

3116. a) $f(x) = x^2 + ax$

$f'(x) = 2x + a$

$f'(2) = 5 \Rightarrow 2 \cdot 2 + a = 5 \Rightarrow a = 4$

$f(x) = x^2 + 4x$

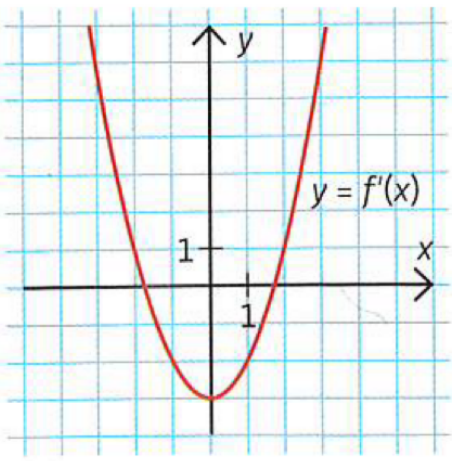
b) $f(x) = ae^{3x}$

$f'(x) = 3ae^{3x}$

$f'(2) = 3e^6 \Rightarrow a = 1$

$f(x) = e^{3x}$

3117 I figuren är grafen till $f'(x)$ ritad. Skissa grafen till $f(x)$ givet att $f(0) = 0$.



3117. $f'(x) = ax^2 - 3$

$f'(2) = 1 \Rightarrow a \cdot 2^2 - 3 = 1 \Rightarrow a = 1$

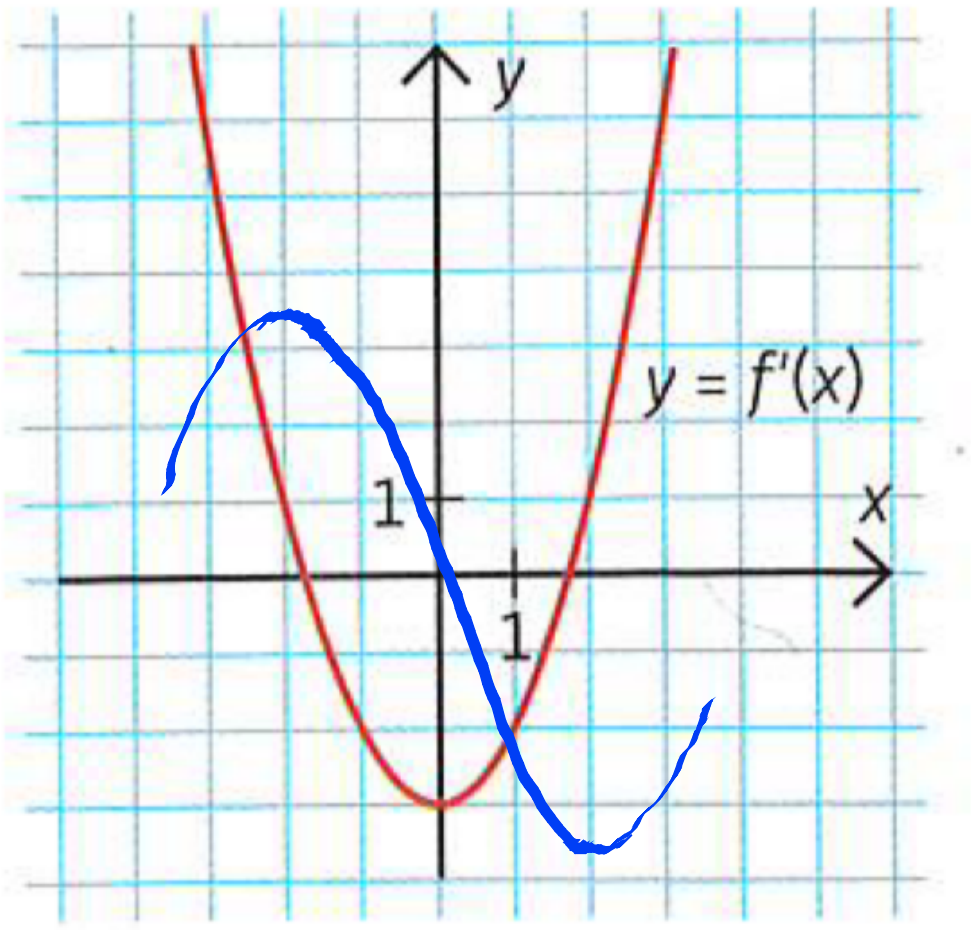
$f'(x) = x^2 - 3$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + c$

$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

x	$f(x)$
$-\sqrt{3}$	$\approx 3{,}46$
0	0
$\sqrt{3}$	$\approx -3{,}46$



3118 För vilket eller vilka värden på x är $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, om $y = 5x - x^2 + \frac{1}{x}$

3118.

$$\frac{dy}{dx} = 5 - 2x - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 + \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow -2 + \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow -2\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) = 0$$

$$1 - \frac{1}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

3126 Bestäm de punkter där tangenterna till kurvan $y = 1 - 2x^3 + 8x$ är parallella med linjen $y = 2x - 3$.

3126. Parallell $\Rightarrow$ Lutningen $k = 2$

$$y' = -6x^2 + 8$$

$$y' = k = 2 \Rightarrow -6x^2 + 8 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y(-1) = 1 - 2\cdot(-1)^3 + 8\cdot(-1) = 1 + 2 - 8 = -5$$

$$y(1) = 1 - 2\cdot 1^3 + 8\cdot 1 = 1 - 2 + 8 = 7$$

$(-1, -5)$ och $(1, 7)$

3127 Låt $f(x) = x^2 + 2x$

a) Visa att $f'(a) = 2a + 2$.

b) Bestäm ekvationen för tangenten till $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$.

3127.

a) $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(a) = 2a + 2$

b) $g - f(a) = f'(a)(x - a)$ (enpunktsformeln)

$g - (a^2 + 2a) = (2a + 2)(x - a)$

$g - a^2 - 2a = 2ax - 2a^2 + 2x - 2a$

$g = (2a + 2)x - a^2$

3128 Antalet bakterier i en bakterieodling kan beskrivas med $N(t) = 1\,500 \cdot e^{2,3t}$, där $N(t)$ är antalet bakterier t timmar efter att försöket påbörjas.

a) Hur många bakterier fanns det när försöket började?

b) Efter hur lång tid är tillväxthastigheten 5 miljoner bakterier per timme?

3128. a) $N(0) = 1500$ st

b) $N'(t) = 3450\, e^{2,3t}$

$N'(t) = 5 \cdot 10^6 \Rightarrow t = \dfrac{\ln \frac{5 \cdot 10^6}{3450}}{2,3} = 3,2$ h

---

3129 Vid djupfrysning av en maträtt kyls maten från 90 °C till –20 °C. Temperaturen sjunker enligt ekvationen $y = 120 \cdot e^{-kt} - 30$ där y °C är matens temperatur då kylningen pågått i t min. När maten kylts i 5,0 minuter är dess temperatur 78 °C. Med vilken hastighet sjunker temperaturen när $t = 11{,}0$?

(*Cp SE3, 1995*)

3129.

$y(5) = 78 \Rightarrow 120 \cdot e^{-5k} - 30 = 78 \Rightarrow k = \dfrac{\ln \frac{108}{120}}{-5} = 0.021$

$y = 120e^{-0,021t} - 30$

$y' = -2.53e^{-0,021t}$

$y'(11.0) = -2.53e^{-0.021 \cdot 11} = -2.0$

Temperaturen sjunker med hastigheten 2 °C/min

3130 En rät linje genom origo skär kurvan $y = 1 - 0{,}25x^2$ i två punkter. Visa att tangenterna i skärningspunkterna är vinkelräta mot varandra.

3130.

Tangenternas lutning: $y' = -0.5x$

Skärningspunkter:

$y_2 = kx \Rightarrow kx = 1 - 0.25x^2$

$0.25(x^2 + 4k - 4) = 0$

$x = \pm(4-4k)$, $x^2 = 4 - 4k$

$y'(4-4k) = -0.5(4-4k) = 2k - 2$

$y'(4k-4) = -0.5(4k-4) = 2 - 2k$

Om kvoten mellan tangenternas lutning $= -1$, så är de vinkelräta:

$$\frac{y'(4-4k)}{y'(4k-4)} = \frac{2k-2}{2-2k} = -\frac{2k-2}{2k-2} = -1 \quad \#$$

3135 En sammansatt funktion h ges av $h(x) = f(g(x))$

a) Bestäm $h(x)$ om $g(x) = x^2 + 2$ och $f(x) = x^2$.

b) Bestäm $h'(2)$.

3135. a) $h(x) = (x^2+2)^2$

b) $h'(x) = 2(x^2+2) \cdot 2x = 4x^3 + 8x$

$h'(2) = 4 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 = 32 + 16 = \underline{48}$

3136 Bestäm $f'(3)$ då

a) $f(x) = 2e^{3x+2}$ b) $f(x) = 5e^{x^2}$

3136. a) $f'(x) = 2e^{3x+2} \cdot 3 = 6e^{3x+2}$

$f'(3) = 6e^{3\cdot 3+2} = \underline{6e^{11}}$

b) $f'(x) = 5e^{x^2} \cdot 2x = 10xe^{x^2}$

$f'(3) = 10 \cdot 3e^{3^2} = \underline{30e^9}$

3137 Bestäm $f'(1)$ då

a) $f(x) = (3x^2 + 2)^4$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

3137.

a) $f'(x) = 4(3x^2+2)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2+2)^3$

$f'(1) = 24 \cdot 1 \cdot (3 \cdot 1^2+2)^3 = 24 \cdot 125 = \underline{3000}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

$f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+3}} = \underline{\dfrac{1}{2}}$

3138 Bestäm $h'(2)$ om $h(x) = f(g(x))$ och om $g(x) = x^2 + 5$ och $f(x) = \sqrt{x}$.

3138.

$h(x) = \sqrt{x^2+5}$

$h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

$h'(2) = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+5}} = \underline{\dfrac{2}{3}}$

3139 Bestäm lutningen på kurvan $y = 0{,}8e^{-2x^2}$, där $x = 1$.

3139.

$$y' = 0.8 \cdot (-4x) \cdot e^{-2x^2}$$

$$y'(1) = -3{,}2 \cdot 1 \cdot e^{-2 \cdot 1^2} = -3{,}2e^{-2}$$

3140 För vilka värden på x är $f'(x) = 0$ om

a) $f(x) = (x^2 + 4x)^2$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 8}$

3140. a) $f'(x) = 2(x^2+4x) \cdot (2x+4)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(x+4)(2x+4) = 0$$

$$x_1 = -4,\ x_2 = -2,\ x_3 = 0$$

b) $$f'(x) = -\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

3141 Bestäm derivatan av $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+x}\right)^4$

3141. $f(x) = (\sqrt{x}+x)^{-4}$

$$f'(x) = \frac{-4}{(\sqrt{x}+x)^5} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right) =$$

$$= \frac{-4}{(\sqrt{x}+x)^5} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{-2-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+x)^5}$$

3142 Vilken lutning har $f(x) = 3^{2x} - 2x + 1$ i den punkt där $x = 2$?

3142. $f'(x) = 2 \cdot \ln 3 \cdot 3^{2x} - 2$

$$f'(2) = 2 \cdot \ln 3 \cdot 3^{2\cdot 2} - 2 = 176$$

3143 Bestäm ekvationen för tangenten till

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x}$ där $x = 2$

b) $f(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$ där $x = 3$

3143. a) $f'(x) = \dfrac{4x+4}{2\cdot\sqrt{2x^2+4x}}$

$f'(2) = \dfrac{4\cdot 2+4}{2\cdot\sqrt{2\cdot 2^2+4\cdot 2}} = \dfrac{12}{2\cdot\sqrt{16}} = \dfrac{3}{2}$

$f(2) = \sqrt{2\cdot 2^2+4\cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

$g - f(2) = f'(2)(x-2)$

$g - 4 = \dfrac{3}{2}(x-2)$

$g = \dfrac{3}{2}x + 1$

b) $f'(x) = -\dfrac{4}{(x+3)^3}$

$f'(3) = -\dfrac{4}{(3+3)^3} = -\dfrac{4}{216} = -\dfrac{1}{54}$

$f(3) = \dfrac{2}{(3+3)^2} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$g - f(3) = f'(3)(x-3)$

$g - \dfrac{1}{18} = -\dfrac{1}{54}(x-3)$

$g = -\dfrac{x}{54} + \dfrac{6}{54}$

3144 För en sammansatt funktion är det viktigt att skilja på vilken som är den inre respektive yttre funktionen. Du har $f(x) = \sqrt{x}$ och $g(x) = x + 2$. Rita av och fyll i tabellen.

Funktion	Definitionsmängd
$f(g(x))$ =	
$g(f(x))$ =	
$f(f(x))$ =	
$g(g(x))$ =	

3144.

Funktion	Definitionsmängd
$f(g(x)) = \sqrt{x+2}$	$x \geq -2$
$g(f(x)) = \sqrt{x}+2$	$x \geq 0$
$f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}}$	$x \geq 0$
$g(g(x)) = x+4$	alla x

3145 Bestäm $h'(3)$ om $h(x) = f(g(x))$ och om $g'(3) = 4$ och $f(x) = 2x + 1$.

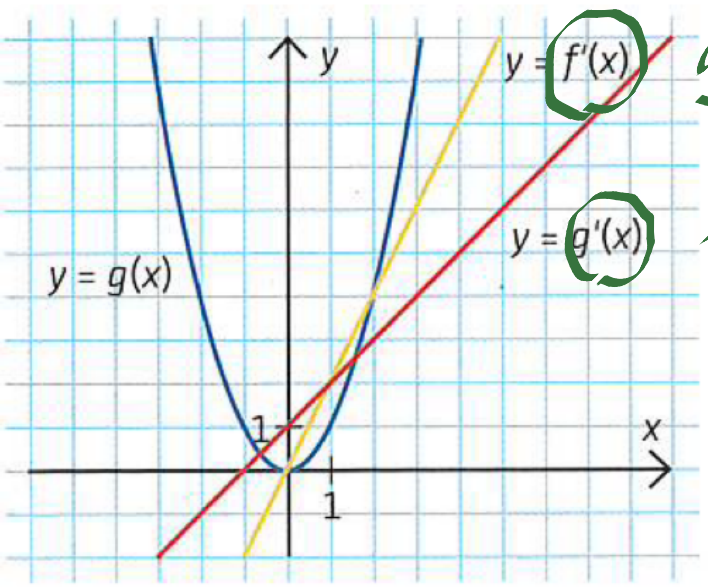
3145. $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$h'(3) = f'(g(3)) \cdot g'(3) = 2 \cdot 4 = \underline{8}$

3146 Bestäm med hjälp av graferna i figuren:

a) $h'(2)$ om $h(x) = f(g(x))$

b) $h'(1)$ om $h(x) = f\left(\frac{1}{g(x)}\right)$



$g'(x)$

$f'(x)$

Feltryck!

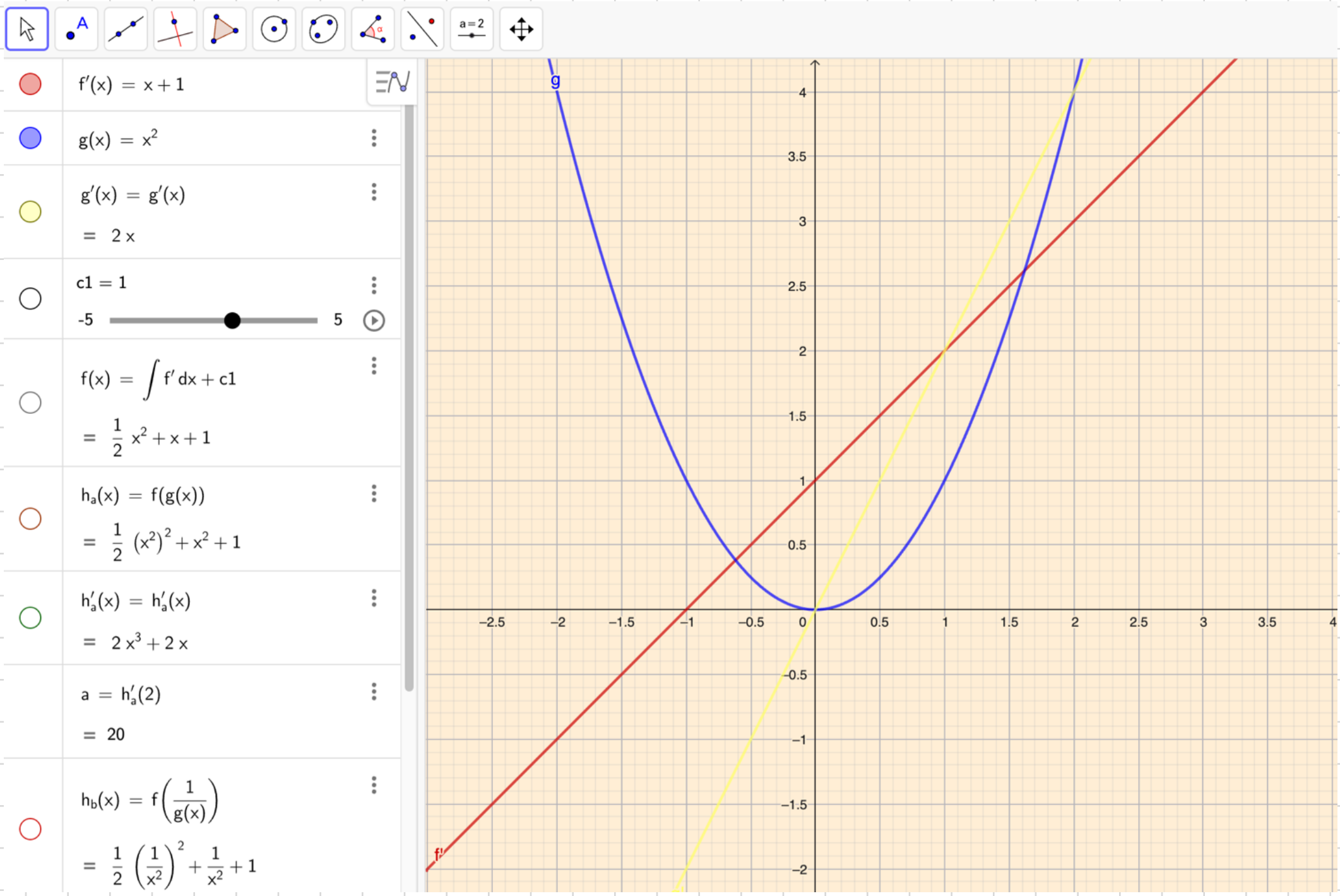
3146. $f'(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$

a) $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (x^2 + 1) \cdot 2x$

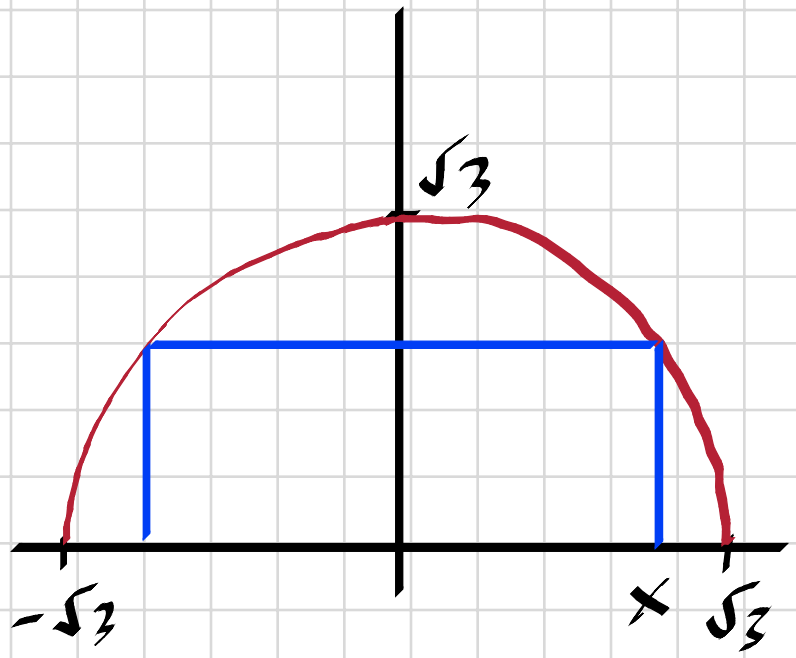
$h'(2) = (2^2 + 1) \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 4 = \underline{20}$

b) $h'(x) = f'\left(\frac{1}{g(x)}\right) \cdot (g(x)^{-1})' = \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \cdot -2 \cdot x^{-3}$

$h'(1) = (1 + 1) \cdot (-2) \cdot 1 = \underline{-4}$


f′(x) = x + 1
g(x) = x²
g′(x) = g′(x)
= 2 x
c1 = 1
-5
5
f(x) = ∫ f′ dx + c1
= 1/2 x² + x + 1
h_a(x) = f(g(x))
= 1/2 (x²)² + x² + 1
h_a′(x) = h_a′(x)
= 2 x³ + 2 x
a = h_a′(2)
= 20
h_b(x) = f(1/g(x))
= 1/2 (1/x²)² + 1/x² + 1
g
f′

3147 En rektangel är ritad i ett koordinatsystem så att sidorna parallella med koordinataxlarna. En sida sammanfaller med x-axeln och de två motstående hörnen ligger på kurvan $y = \sqrt{3 - x^2}$. Bestäm rektangelns största area.



3147.

$$A = 2 \cdot x\left(\sqrt{3-x^2}\right) = 2\sqrt{3x^2-x^4}\,, \quad x>0$$

$$A' = \frac{6x-4x^3}{\sqrt{3x^2-x^4}}\,, \quad x>0$$

$$A'=0 \Rightarrow 6x-4x^3=0 \Rightarrow 2x(3-2x^2)=0 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$A_{max} = A\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = 2\cdot\sqrt{3\cdot\tfrac{3}{2}-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2} = \underline{3 \text{ a.e.}}$$

3148 Bestäm ett exakt värde av $f'(1)$ då

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$$

3148.

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} e^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} e^{\sqrt{1^2+1}} = \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

3149 Låt $f(x) = \sqrt{kx+2}$ och bestäm k så att

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

3149.

$$f'(x) = \frac{k}{2\sqrt{kx+2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k}{2\sqrt{k+2}} = \frac{1}{2}$$

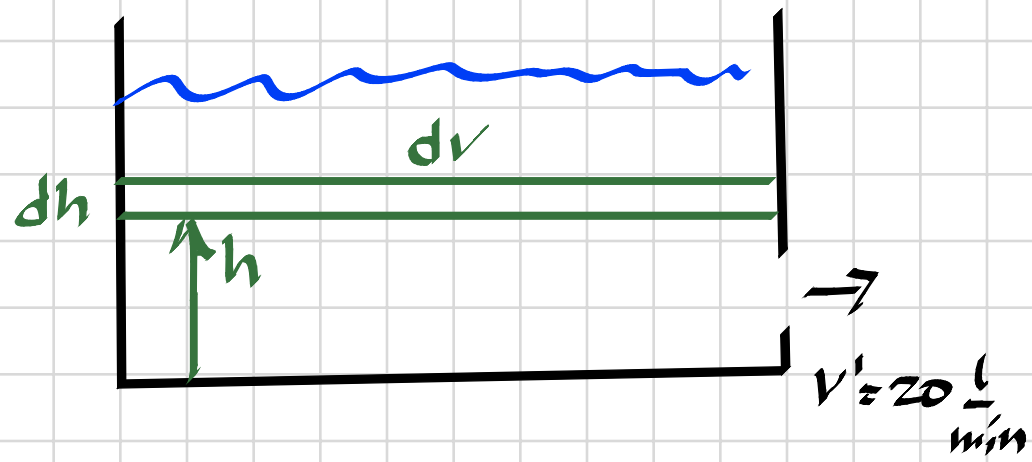
$$k = \sqrt{k+2}$$

$$k^2 - k - 2 = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad (k = -1 \text{ falsk lösning})$$

$$\underline{k = 2}$$

3156 Ett badkar har formen av ett rätblock med längden 160 cm, bredden 80 cm och djupet 50 cm. När man tappar ur vattnet rinner det ut med en hastighet av 20 l/min. Hur snabbt sjunker vattennivån i badkaret?



3156.

$$\frac{dV}{dt} = 16 \cdot 8 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 20 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{20}{16 \cdot 8} = 0{,}16 \text{ dm/min}$$

3157 Astrid har ett garnnystan som har volymen 900 cm^3. När hon stickar minskar volymen på hennes garnnystan med 200 cm^3/h. Hur snabbt minskar nystanets radie när volymen är 900 cm^3?

3157.

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \quad , \quad \frac{dV}{dt} = -200$$

$$r(V) = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} \Rightarrow r(900) = \left(\frac{3 \cdot 900}{4\pi}\right)^{1/3} = 6{,}0 \text{ cm}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \left[\frac{dV}{dr}\right]^{-1} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{-200}{4\pi r^2}$$

$$\frac{dr}{dt}(r = 6{,}0) = \frac{-200}{4\pi \cdot 6^2} = -0{,}44 \text{ cm/h}$$

Radien sjunker med 0.44 cm/h

3158 En liten sten kastas i en damm. Då skapas en våg i form av en cirkel på vattenytan. Enligt en förenklad modell kan man anta att cirkelns radie ökar med den konstanta hastigheten 1,5 m/s. Med vilken hastighet ändras cirkelytans area 6,0 sekunder efter det att stenen träffat vattenytan?

(*Nationella provbanken MaE 2005*)

3158.

$\frac{dr}{dt} = 1.5 \text{ m/s}$

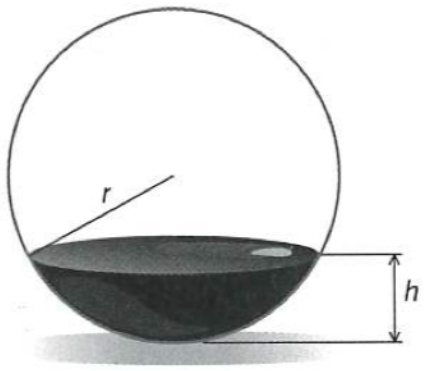
$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot 1.5 = 3\pi r$

Vid $t = 6.0$ s har radien ökat till $r = 1.5 \cdot 6 = 9$ m

$\frac{dA}{dt}(r=9) = 3\pi \cdot 9 = \underline{85 \text{ m}^2/\text{s}}$

3159 En oljetank har formen av ett klot med radien 3,5 m. När oljenivån är h m, är volymen olja i tanken $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ m^3.



Tömmer man tanken rinner oljan ut med hastigheten 250 liter per minut. Hur snabbt sjunker oljenivån när den är 2,0 m?

3159.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \left[\frac{dV}{dh}\right]^{-1} \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dh} = 2\pi hr - \pi h^2 = \pi h(2r - h)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h(2r-h)} \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}(h=2) = \frac{0{,}25}{\pi \cdot 2(2 \cdot 3{,}5 - 2)} = \underline{8 \text{ mm/min}}$$

3160 En doftkula har volymen 3,0 cm^3. På grund av avdunstning minskar kulans volym med tiden t månader på ett sådant sätt att volymändringen per tidsenhet är proportionell mot kulans area. Efter 1 månad är doftkulans volym 2,0 cm^3.

a) Visa att förutsättningarna ovan leder till att $\frac{dr}{dt} = k$ där k är en konstant och r cm betecknar kulans radie efter t månader.

b) Beräkna kulans volym efter 4 månader.

(*Np MaE ht 1996*)

$$\frac{dV}{dt} = m \cdot A = m \cdot 4\pi r^2 = n \cdot r^2$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = q \cdot r^3$$

3160.

a) $$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \left[\frac{dV}{dr}\right]^{-1} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{n \cdot r^2}{3qr^2} = \frac{n}{3q} = k \quad \#$$

b) $$r_0 = \left(\frac{3V_0}{4\pi}\right)^{1/3} = \left(\frac{3 \cdot 3}{4\pi}\right)^{1/3} = 0{,}8947 \text{ cm}$$

$$r_1 = \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{1/3} = \left(\frac{3 \cdot 2}{4\pi}\right)^{1/3} = 0{,}7816 \text{ cm}$$

$$dr = k \cdot dt$$

$$\int_{r_0}^{r_1} dr = k \cdot \int_{0}^{1} dt \quad \Rightarrow k = \frac{r_1 - r_0}{t} = 0{,}7816 - 0{,}8947 = -0{,}113$$

$$\int_{r_0}^{r} dr = -0{,}11 \cdot \int_{0}^{4} dt \quad \Rightarrow r = r_0 - 0{,}113 \cdot 4 = 0{,}8947 - 0{,}452 = 0{,}443$$

$$V(4 \text{ mån}) = \frac{4\pi \cdot 0{,}443^3}{3} = \underline{0{,}36 \text{ cm}^3}$$

3210 Lös ekvationen $f'(x) = 1$ om

a) $f(x) = \sin 2x$ b) $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$

c) $f(x) = 3 \sin \frac{2x}{9}$ d) $f(x) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

3210.

a) $2\cos 2x = 1$

$2x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$x = \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$

b) $\cos \frac{x}{2} = 1$

$\frac{x}{2} = n \cdot 2\pi$

$x = n \cdot 4\pi$

c) $\frac{2}{3} \cos \frac{2x}{9} = 1$

Sakuar lösning

d) $-4 \sin \left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\cos 2x = \frac{1}{4}$

$2x = \pm \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + n \cdot 2\pi \approx 1.32 + n \cdot 2\pi$

$x = \pm 0.66 + n \cdot \pi$

3211 Förenkla $f(x) + f''(x)$ om

$f(x) = 4 \sin 3x - 5 \cos x$

(Np MaD vt 1997)

3211.

$$f(x) = 4\sin 3x - 5\cos x$$

$$f'(x) = 12\cos 3x + 5\sin x$$

$$f''(x) = 5\cos x - 36\sin 3x$$

$$f(x) + f''(x) = 4\sin 3x - 5\cos x + 5\cos x - 36\sin 3x = -32\sin 3x$$

3212 Bestäm derivatans nollställen

a) $u(t) = \sin\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$

b) $i(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$

3212. a) $u'(t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$

$$u'(t) = 0 \Rightarrow \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$2t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$2t = \frac{2\pi}{3} + n \cdot \pi$$

$$t = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

b) $i'(t) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$

$$i'(t) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right) = 0$$

$$t = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$$

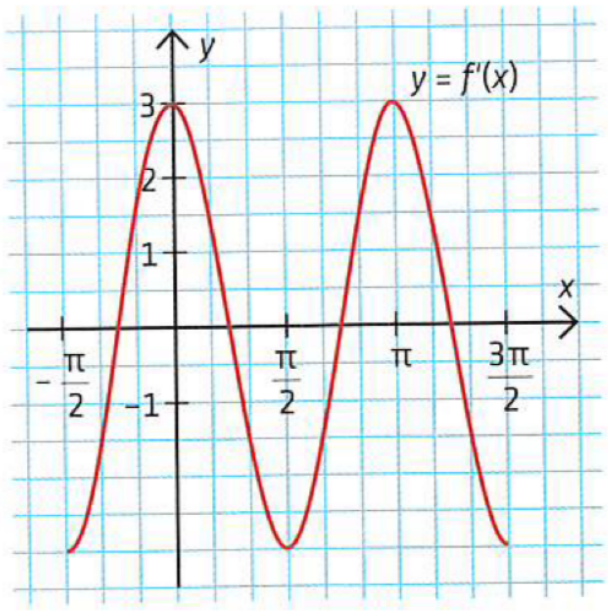
3213 Bestäm riktningskoefficienten för tangenten till $y = 3\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ i punkten där $x = \frac{\pi}{2}$

3213.

$$y' = 3\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

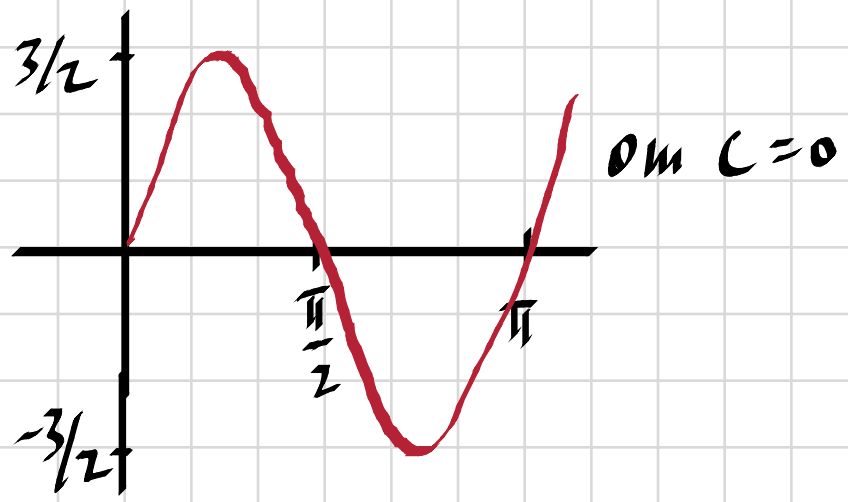
3214 Ö Grafen visar $y = f'(x)$ som är derivatan av $f(x)$. Hur kan funktionsuttrycket $f(x)$ se ut?



3214.

$$f'(x) = 3\cos 2x$$

$$f(x) = \frac{3}{2}\sin 2x + C$$



om C = 0

3215 Finn gränsvärdena om x anges i ~~grader~~ radianer

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

3215.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \underline{1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{\sin x}{1} = \underline{0}$

3216 Derivera $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

3216.

$f(x) = (\sin x)^{-1}$

$f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

3222 Kurvan $y = \ln x$ har en tangent i punkten $(1, 0)$. Bestäm ekvationen för den tangenten.

3222.

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y(1) = \ln 1 = 0$$

$$y'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$g - y(a) = y'(a)(x - a)$$

$$g - 0 = 1(x - 1)$$

$$g = x - 1$$

3223 Bestäm

a) De^{x^2}

b) $D\left(\frac{1}{e^t} + 4\right)$

c) $D5^{3x}$

d) $D(\ln (x + 1)^2)$

3223.

a) $2xe^{x^2}$

b) $-\frac{1}{e^t}$

c) $3 \cdot \ln 5 \cdot 5^{3x}$

d) $2 \cdot \frac{1}{x+1}$

3224 Derivera

a) $y = e^{x^2 + 3x}$

b) $y = e^{\sqrt{x}}$

c) $y = \dfrac{1}{e^{2x} - 2}$

d) $y = e^{\cos x}$

3224.

a) $y' = (2x+3) \cdot e^{x^2+3x}$

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$

c) $y' = -\dfrac{1}{(e^{2x}-2)^2} \cdot 2 \cdot e^{2x}$

d) $y' = -\sin x \cdot e^{\cos x}$

3225 I vilket intervall är funktionen $f(x) = \ln 2x - 0{,}5x^2$ växande?

3225.

$f' = \dfrac{1}{x} - x$

$f' > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} - x > 0 \Rightarrow x^2 < 1$

För alla $0 < x < 1$

3226 Låt $f(x) = \ln 2x - \ln x$

a) Visa med hjälp av derivata att $f'(x) = 0$.

b) Visa med hjälp av logaritmlagarna att $f(x)$ är konstant.

3226.

a) $f'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$ #

b) $\ln 2x - \ln x = \ln \frac{2x}{x} = \ln 2$ #

3227 Bestäm värdet av konstanten k så att linjen $y = kx + 2$ tangerar kurvan $y = \ln x$.

3227.

$y_1 = y_2 \Rightarrow kx + 2 = \ln x$

$y_1' = y_2' \Rightarrow k = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} \cdot x + 2 = \ln x$

$\ln x = 3$

$x = e^3$

$k = \frac{1}{e^3}$

3240 Lös ekvationen $f'(x) = 0$ om $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 1)$.

3240. $f'(x) = e^x(x^2-2x+1) + e^x(2x-2) = e^x(x^2-1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{x = \pm 1}$

3241 I ett område där det bor 400 personer sprids ett rykte. Antalet personer $N(t)$ som hört ryktet efter t timmar beskrivs av

$$N(t) = \frac{400}{1 + 399e^{-0,4t}}$$

Med vilken hastighet sprids ryktet efter 3 timmar?

3241.

$$N(t) = 400 \cdot (1 + 399e^{-0,4t})^{-1}$$

$$N'(t) = 400 \cdot (-1) \cdot (1 + 399e^{-0,4t})^{-2} \cdot (-0,4) \cdot 399e^{-0,4t} =$$

$$= \frac{63840 \cdot e^{-0,4t}}{(1 + 399e^{-0,4t})^2}$$

$$N'(3) = \frac{63840 \cdot e^{-0,4 \cdot 3}}{(1 + 399e^{-0,4 \cdot 3})^2} = \underline{1,3 \text{ pers/h}}$$

3242 Derivera $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2}$

a) med hjälp av kvotregeln

b) med hjälp av produktregeln

c) utan att använda någon av ovanstående regler

3242.

a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 - (\sqrt{x}-2)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{\frac{x^{1,5}}{2} - 2x^{1,5} + 4x}{x^4} =$

$= \dfrac{4x - \frac{3}{2}x^{1,5}}{x^4} = \underline{\dfrac{4 - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3}}$

b) $f(x) = (\sqrt{x}-2)\cdot x^{-2}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^{-2} + (\sqrt{x}-2)\cdot(-2)\cdot x^{-3} =$

$= \dfrac{1}{2\cdot x^{2,5}} - \dfrac{2}{x^{2,5}} + \dfrac{4}{x^3} = \underline{\dfrac{4 - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3}}$

c) $f(x) = (\sqrt{x}-2)\cdot x^{-2} = x^{-1,5} - 2x^{-2}$

$f'(x) = \underline{\dfrac{4 - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3}}$

3243 Bestäm $\frac{dy}{dt}$ om $y = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t}}$

3243.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(2e^{2t} + 2e^{-2t})(e^{2t} + e^{-2t}) - (e^{2t} - e^{-2t})(2e^{2t} - 2e^{-2t})}{(e^{2t} + e^{-2t})^2} =$$

$$= \frac{2e^{4t} + 2 + 2 + 2e^{-4t} - 2e^{4t} + 2 + 2 - 2e^{-4t}}{(e^{2t} + e^{-2t})^2} =$$

$$= \frac{8}{(e^{2t} + e^{-2t})^2}$$

3244 Derivera $f(x) = \frac{e^x \cos x}{x}$

3244. $D(e^x \cos x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$

$$f'(x) = \frac{e^x(\cos x - \sin x) \cdot x - e^x \cos x \cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{e^x((x-1)\cos x - x \cdot \sin x)}{x^2}$$

3245 Bestäm $D\left(\frac{1}{v(x)}\right)$

a) med hjälp av kvotregeln

b) genom att betrakta den som en sammansatt funktion

3245.

a) $D\left(\frac{1}{v(x)}\right) = \frac{0 - 1 \cdot v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$

b) $D\left(\frac{1}{v(x)}\right) = D(v(x)^{-1}) = (-1) \cdot v(x)^{-2} \cdot v'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$

3246 Bestäm $D(\sin^2 x \cdot e^{x^2})$

3246. $D(\sin^2 x) = 2\sin x \cdot \cos x \quad (= \sin 2x)$

$D(e^{x^2}) = 2xe^{x^2}$

$D(\sin^2 x \cdot e^{x^2}) = 2\sin x \cdot \cos x \cdot e^{x^2} + \sin^2 x \cdot 2xe^{x^2} =$

$= 2e^{x^2}\sin x(\cos x + x \cdot \sin x)$

3247 Visa att funktionen f med $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{2x}$ har en minimipunkt i intervallet $-1 \le x \le 1$.

3247. $f'(x) = (2x-1)\cdot e^{2x} + (x^2-x)\cdot 2e^{2x} =$

$= e^{2x}(2x^2-1)$

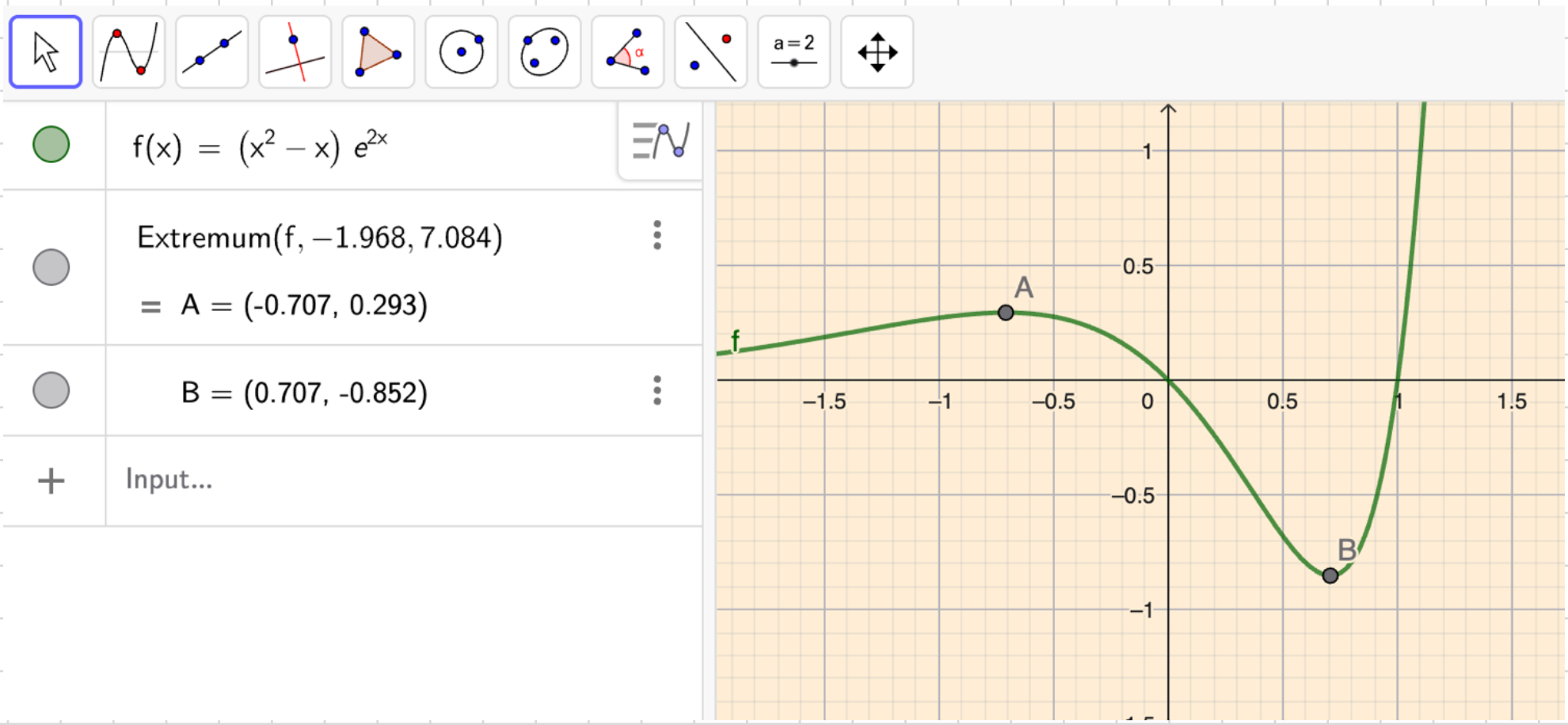
$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x) = 2e^{2x}(2x^2-1) + e^{2x}\cdot 4x = e^{2x}(4x^2+4x-2)$

$f''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-\sqrt{2}}(2 - \frac{4}{\sqrt{2}} - 2) < 0 \Rightarrow$ maximum

$f''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{\sqrt{2}}(2 + \frac{4}{\sqrt{2}} - 2) > 0 \Rightarrow$ minimum

Funktionen har ett minimum då $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$



3248 Visa med hjälp av kvotregeln att

$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3248.

$$D(\tan x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \#$$

3249 Tangenten till $y = x^3 \cdot e^{-x}$ i den punkt där $x = 4$ bildar tillsammans med de positiva koordinataxlarna en triangel. Bestäm triangelns area.

3249.

$$y(4) = 64e^{-4}$$

$$y'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot (-1) \cdot e^{-x} = e^{-x}(3x^2 - x^3)$$

$$y'(4) = -16e^{-4}$$

$$g - y(4) = y'(4)(x-4)$$

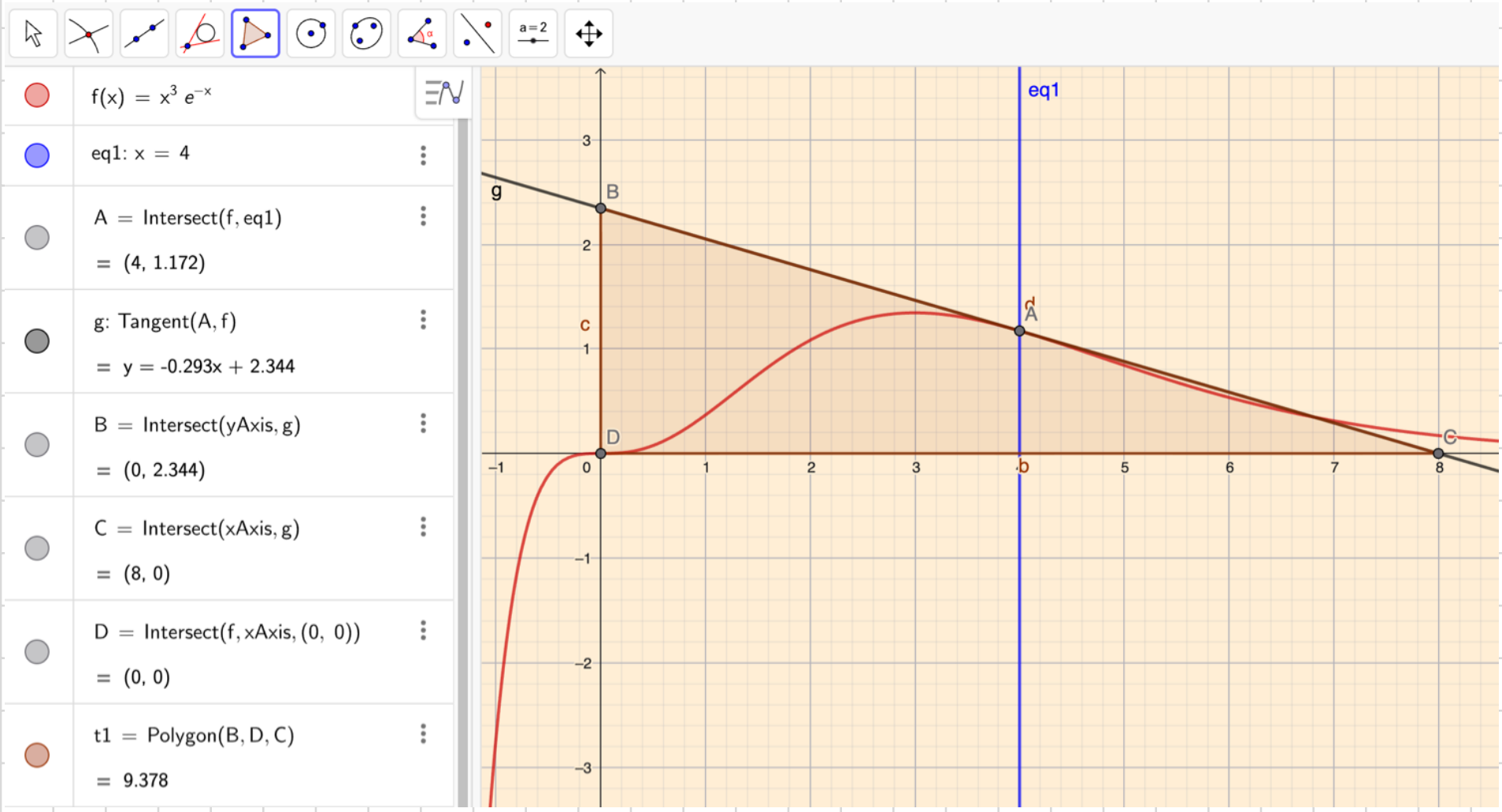
$$g - 64e^{-4} = -16e^{-4}(x-4)$$

$$g = -16e^{-4}x + 128e^{-4}$$

$$x = 0 \Rightarrow g = 128e^{-4}$$

$$g = 0 \Rightarrow 16e^{-4}x = 128e^{-4} \Rightarrow x = 8$$

$$\text{Arean} = \frac{8 \cdot 128e^{-4}}{2} = 512e^{-4} \text{ a.e.} \approx 9.4 \text{ a.e.}$$



3250 Härled kvotregeln Det vill säga visa att

$$D\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

3250.

$$D\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = D\left(u(x)\cdot v(x)^{-1}\right) = u'(x)\cdot v(x)^{-1} + u(x)\cdot(-1)\cdot v(x)^{-2}\cdot v'(x)$$

$$= \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2} \quad \#$$

3259 Antalet starar i Sverige har undersökts sedan år 1979. Resultaten av denna undersökning kan matematiskt beskrivas med differentialekvationen:

$\frac{dy}{dt} = -0{,}03y$, där y är antalet starar vid tiden t år från år 1979.

Förklara med egna ord innebörden av differentialekvationen i detta sammanhang.

(*Np MaD vt 2005*)

3259.

Förändringshastigheten minskar med 3% av den aktuella antalet starar.

3260 Bestäm k så att $y = e^{kx}$, är en lösning till $y'' + 3y' + 2y = 0$

3260. $k^2 + 3k + 2 = 0$

$k = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} = -\frac{3 \pm 1}{2}$

$k_1 = -2$, $k_2 = -1$

3261 Bestäm b så att $y = 2\cos bx$ blir en lösning till differentialekvationen $y'' + 8y = 0$

3261.

$$y' = -2b\sin bx$$

$$y'' = -2b^2\cos bx$$

$$-2b^2\cos bx + 8\cdot(2\cos bx) = 0$$

$$2b^2 = 16 \Rightarrow \underline{b = \pm\sqrt{8}}$$

3262 Bestäm konstanterna A, B och C så att $y = e^{3x} + Ax^2 + Bx + C$ är en lösning till differentialekvationen $y' - 3y = 6x^2 + 10x$.

3262.

$$y' = 3e^{3x} + 2Ax + B$$

$$3e^{3x} + 2Ax + B - 3(e^{3x} + Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 + 10x$$

$$-3Ax^2 = 6x^2 \Rightarrow A = -2$$

$$2A - 3B = 10 \Rightarrow B = \frac{2\cdot(-2) - 10}{3} = -\frac{14}{3}$$

$$B - 3C = 0 \Rightarrow C = -\frac{14}{9}$$

$$\underline{(A, B, C) = \left(-2, -\frac{14}{3}, -\frac{14}{9}\right)}$$

3263 Visa att differentialekvationen $y' - ay = 0$ har lösningen $y = Ce^{ax}$ oberoende av värdet på konstanterna a och C.

3263.

$$y' = ace^{ax} \Rightarrow$$

$$y' - ay = ace^{ax} - a \cdot ce^{ax} = 0 \quad \#$$

3264 Visa att differentialekvationen $y'' + A^2y = 0$ har lösningen $y = \sin Ax + \cos Ax$ oberoende av värdet på konstanten A.

3264.

$$y' = A\cos Ax - A\sin Ax$$

$$y'' = -A^2\sin Ax - A^2\cos Ax$$

$$y'' + A^2y = -A^2\sin Ax - A^2\cos Ax + A^2(\sin Ax + \cos Ax) = 0$$

$\#$

3265 Vilka värden kan A och B ha för att $y = Ax^2 + B$ ska vara en lösning till $y'' - y' = -6x + 6$?

3265.

$y' = 2Ax$

$y'' = 2A$

$2A - 2Ax = -6x + 6$

$A = 3$, B valfritt

3266 ö Konstruera en uppgift som handlar om att verifiera en lösning till en differentialekvation av första ordningen. Lösningen som ska satisfiera ekvationen är $y = 2e^{-x}$.

3266. Visa att $y' + y = 0$

3267 En kopp te står i ett rum med temperaturen 23 °C. Temperaturen T °C hos teet avtar med tiden t h så att temperaturförändringens hastighet är direkt proportionell mot skillnaden mellan teets och rummets temperatur.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver teets avsvalning.

b) Visa att $T(t) = 72e^{-kt} + 23$ är en lösning till differentialekvationen för något värde på konstanten k.

3267. a) $T' = -k(T-23)$

b) $T = 72e^{-kt} + 23$

$T' = -72k\,e^{-kt}$

$HL = -k(T-23) = -k(72e^{-kt} + 23 - 23) = -72k\,e^{-kt} = VL$ #

3268 Man kan visa att antalet radioaktiva kärnor som sönderfaller per sekund är proportionellt mot antalet radioaktiva kärnor som finns i det ämne man undersöker. Detta brukar skrivas som att

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

där $N(t)$ är antalet kärnor i det radioaktiva preparatet och λ ett positivt tal, som brukar kallas sönderfallskonstanten.

a) Varför sätter man ett minustecken framför konstanten λ i differentialekvationen $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$?

b) Visa att $N(t) = Ce^{-\lambda t}$, där C är en konstant, är en lösning till differentialekvationen $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$.

c) Vad representerar konstanten C i funktionsuttrycket $N(t) = Ce^{-\lambda t}$?

3268. a) För att antalet kvarvarande kärnor sjunker (förutsatt att $\lambda > 0$)

b) $\frac{dN}{dt} = -C\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda N$ #

c) Antalet kärnor vid tiden $t = 0$.