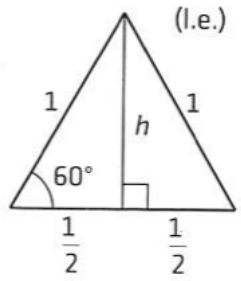
2108 Använd figuren för att bestämma de exakta värdena av cos 60° och tan 60°.



2108. $\cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \underline{\frac{1}{2}}$

$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\tan 60° = \frac{h}{1/2} = \underline{\sqrt{3}}$

2109 Anders och Karin diskuterar trigonometri. Anders har noterat att sinus för en vinkel blir större och större när vinkelns storlek ökar i intervallet $0 \leq v < 90°$. Karin ser också att det stämmer och börjar förklara varför det är på det viset.

a) Ge förslag på hur Karins förklaring skulle kunna se ut.

b) Vad gäller för cosinus av en vinkel, när vinkeln växer i intervallet $0 \leq v < 90°$?

2109. a) Med ökad vinkel blir periferipunktens y-koordinat (=sinusvärdet) större.

b) Cosinusvärdet minskar.

2110 I ekvationerna är $0 \le x < 50°$. Lös ekvationerna och svara exakt.

a) $\cos(2x + 15°) = \frac{1}{2}$

b) $\tan(3x + 30°) = \sqrt{3}$

2110. a) $2x + 15° = \pm 60°$

$$x = \frac{60° - 15°}{2} = \underline{22{,}5°}$$

b) $3x + 30° = 60°$ $\qquad$ $3x + 30° = 240°$

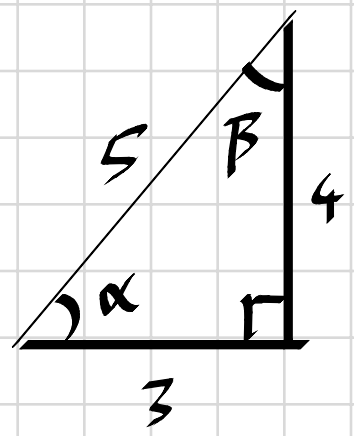
$$x = \frac{60° - 30°}{3} = \underline{10°} \qquad \left(x = \frac{240° - 30°}{3} = 70°\right)$$

2111 En *egyptisk triangel* används ofta som exempel när Pythagoras sats ska introduceras. Triangelns sidor har förhållandena 3 : 4 : 5.

a) Ge exempel på sidlängder som en egyptisk triangel kan ha.

b) Visa att en egyptisk triangel är rätvinklig.

c) Bestäm de två spetsiga vinklarna.



2111. a) Sidlängderna 3, 4 och 5.

b) $3^2 + 4^2 = 5^2$

c) $\alpha = \arctan\frac{4}{3} \approx \underline{53{,}1°}$

$\beta = \arctan\frac{3}{4} \approx \underline{36{,}9°}$

2112 Bestäm det exakta värdet av

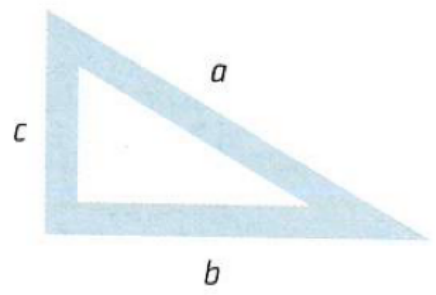
a) $\dfrac{\cos 30°}{\sin 45°}$ b) $2(\cos 30° - \sin 45°)$

2112.

a) $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} = \underline{\sqrt{\dfrac{3}{2}}}$

b) $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

2113 Peppe vill tillverka ett mätverktyg i trä som ser ut som på bilden. Vinklarna ska vara 30°, 60° och 90°. Ge förslag på lämpliga mått på sträckorna a, b och c.



2113.

a = 20 cm

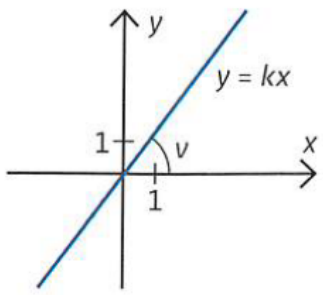
b = 17,3 cm

c = 10 cm

2114 En rät linje genom origo kan beskrivas av ekvationen $y = kx$. Ett större värde på k ger en brantare lutning och därmed en större vinkel v mellan linjen och x-axeln.

a) Skriv av tabellen och komplettera den där det finns luckor.

k	v
	30°
1	
$\sqrt{3}$	
2	
	80°



b) Ange ett samband mellan k och v.

2114. a)

k	v
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	30°
1	45°
$\sqrt{3}$	60°
2	63°
5,7	80°

b) $k = \tan v$

2120 Använd enhetscirkeln och fyll i de exakta värdena i tabellen här nedanför. Utgå från värdena i tabellen på sidan 26.

v	sin v	cos v
180°	0	-1
210°	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
225°	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
240°	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$
270°	-1	0
300°	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$
315°	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
330°	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$
360°	0	1

2121 Bestäm utan att använda räknare.

a) $\cos(-315°)$ b) $\sin 405°$

c) $\tan 600°$ d) $\cos 660°$

2121.

a) $\cos(-315°) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sin 405° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\tan 600° = \tan 240° = \tan 60° = \sqrt{3}$

d) $\cos 660° = \cos 300° = \cos(-60°) = \frac{1}{2}$

2127 Lös ekvationerna. Svara med hela grader.

a) $\cos(x - 42°) = -0{,}33$

b) $\tan(2x + 30°) = 0{,}88$

c) $\sin(5x - 122°) = 0{,}32$

2127. a) $x - 42° = \arccos(-0{,}33) = \pm 109{,}3° + n \cdot 360°$

$x_1 = 42° + 109{,}3° + n \cdot 360° \approx 151° + n \cdot 360°$

$x_2 = 42° - 109{,}3° + n \cdot 360° \approx -67° + n \cdot 360°$

b) $2x + 30° = \arctan 0{,}88 = 41{,}3° + n \cdot 180°$

$x = \frac{41{,}3° - 30°}{2} + n \cdot \frac{180°}{2} \approx 6° + n \cdot 90°$

c) $5x_1 - 122° = \arcsin 0{,}32 = 18{,}7° + n \cdot 360°$

$5x_2 - 122° = 180° - 18{,}7° + n \cdot 360° = 161{,}3° + n \cdot 360°$

$x_1 = \frac{122° + 18{,}7°}{5} + n \cdot \frac{360°}{5} \approx 28° + n \cdot 72°$

$x_2 = \frac{122° + 161{,}3°}{5} + n \cdot \frac{360°}{5} \approx 57° + n \cdot 72°$

2128 Lösningen till en trigonometrisk ekvation är $x = 70° + n \cdot 360°$ eller $x = 110° + n \cdot 360°$

a) Hur kan ekvationen se ut?

b) Bestäm de lösningar till ekvationen som ligger i intervallet $720° \leq x \leq 1\,080°$

2128.

a) $\sin x = 0{,}94$

b) $70°, 430°, \underline{790°}, 1150°$

$110°, 470°, \underline{830°}, 1190°$

2129 Trude och Linda löser trigonometriska ekvationer. De vet att till exempel ekvationen $\sin x = 0{,}4$ har lösningar med perioden 360°. Men de har svårare att inse att ekvationen $\sin \frac{x}{2} = 0{,}4$ har lösningar med perioden 720°.

Hjälp Trude och Linda genom att ge en förklaring till varför perioden till den sistnämnda ekvationen är 720°.

2129. Både den första och kommande vinklar måste dubbleras annars blir avståndet mellan dem för kort.

2130 ö Ge exempel på en trigonometrisk ekvation med lösningen $x = 90° + n \cdot 120°$.

2130. $\sin 3x = -1$

2136 Bestäm de lösningar till ekvationerna som ligger inom de angivna intervallen.

a) $\sin 5x = 0{,}8$ i intervallet $90° < x < 180°$

b) $\tan 3x = -1{,}2$ i intervallet $500° < x < 700°$

2136. a) $5x_1 = \arcsin 0{,}8 + n \cdot 360° = 53{,}1° + n \cdot 360°$

$5x_2 = 180° - 53{,}1° + n \cdot 360° = 126{,}9° + n \cdot 360°$

$x_1 = 10{,}6° + n \cdot 72°$

$x_2 = 25{,}4° + n \cdot 72°$

n	x_1	x_2
1	$82{,}6°$	$97{,}4°$
2	$154{,}6°$	$169{,}4°$

b) $3x = \arctan(-1{,}2) + n \cdot 180° = -50{,}2° + n \cdot 180°$

$x = -16{,}7° + n \cdot 60°$

n	x
9	$523{,}3°$
10	$583{,}3°$
11	$643{,}3°$

2137 Bestäm de lösningar till ekvationerna som ligger i intervallet $300° < x < 600°$.

a) $\sin\frac{x}{5} = 0{,}95$

b) $\cos\frac{x}{2} = 0{,}10$

2137. a) $\frac{x_1}{5} = \arcsin 0{,}95 + n\cdot 360° = 71{,}8° + n\cdot 360°$

$\frac{x_2}{5} = 180° - 71{,}8° + n\cdot 360° = 108{,}2 + n\cdot 360°$

$x_1 = \underline{359{,}0}° + n\cdot 180°$

$x_2 = \underline{541{,}0}° + n\cdot 180°$

b) $\frac{x_1}{2} = \arccos 0{,}10 + n\cdot 360° = 84{,}3° + n\cdot 360°$

$\frac{x_2}{2} = -84{,}3° + n\cdot 360°$

$x_1 = 168{,}5° + n\cdot 720°$

$x_2 = -168{,}5° + n\cdot 720°$

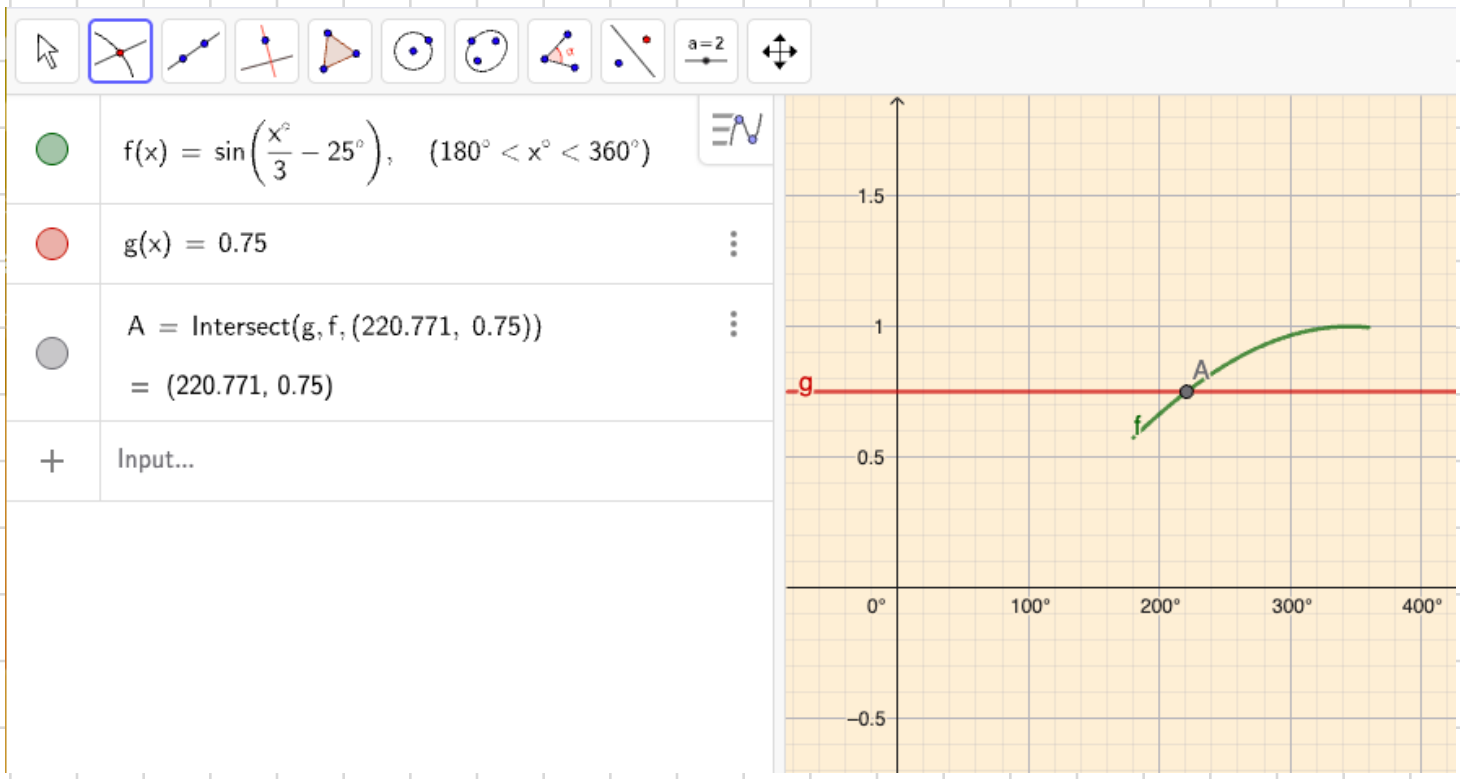
n	x_1	x_2
1	$888{,}5°$	$\underline{551{,}5}°$

2138 Bestäm de lösningar till ekvationerna som ligger i intervallet $180° < x < 360°$. Avrunda till hela grader.

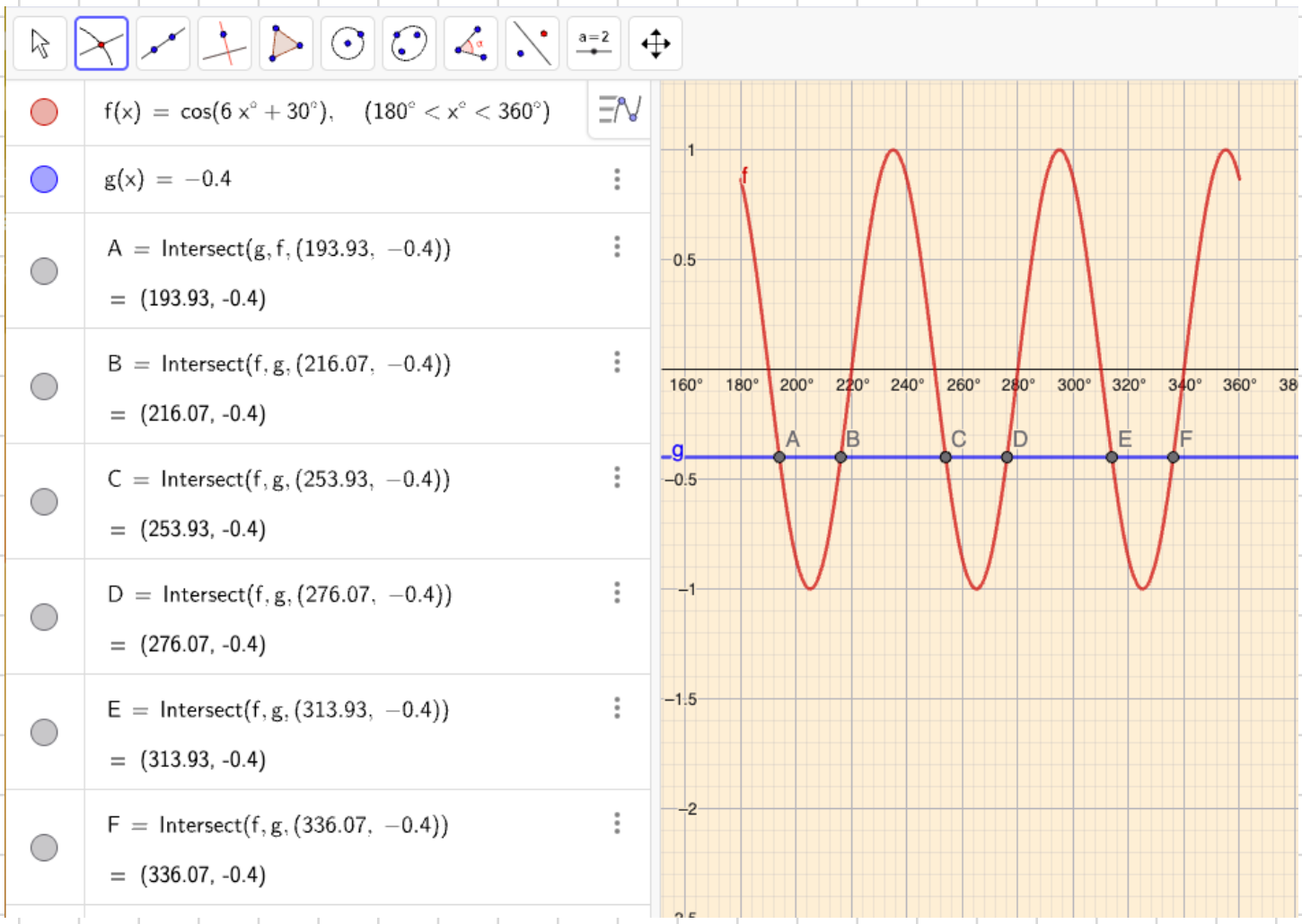
a) $\sin\left(\frac{x}{3} - 25°\right) = 0{,}75$

b) $\cos(6x + 30°) = -0{,}40$

2138 a) Geogebra ger $x = 221°$



b) Geogebra ger $x_1 = 194°$, $x_2 = 216°$, $x_3 = 254°$
$x_4 = 276°$, $x_5 = 314°$, $x_6 = 336°$



2139 Lös ekvationerna.

a) $(\sin x)^2 = \frac{1}{2}$

b) $\cos 2x = \cos 40°$

c) $\cos x \sin x + \frac{\cos x}{2} = 0$

2139.

a) $\sin x_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin x_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_1 = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + n \cdot 360° = -45° + n \cdot 360°$

$x_2 = -180° + 45° + n \cdot 360° = -135° + n \cdot 360°$

$x_3 = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) + n \cdot 360° = 45° + n \cdot 360°$

$x_4 = 180° - 45° + n \cdot 360° = 135° + n \cdot 360°$

b) $\cos 2x = \cos 40°$

$2x_1 = 40° + n \cdot 360°$

$2x_2 = -40° + n \cdot 360°$

$x_1 = 20° + n \cdot 180°$

$x_2 = -20° + n \cdot 180°$

c) $\cos x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \underline{90^\circ + n \cdot 180^\circ}$

$\sin x + \frac{1}{2} = 0$

$x_2 = \underline{-30^\circ + n \cdot 360^\circ}$

$x_3 = -180^\circ + 30^\circ + n \cdot 360^\circ = \underline{-150^\circ + n \cdot 360^\circ}$

2140 Lös ekvationen $\sin x = \sin(x + 30^\circ)$

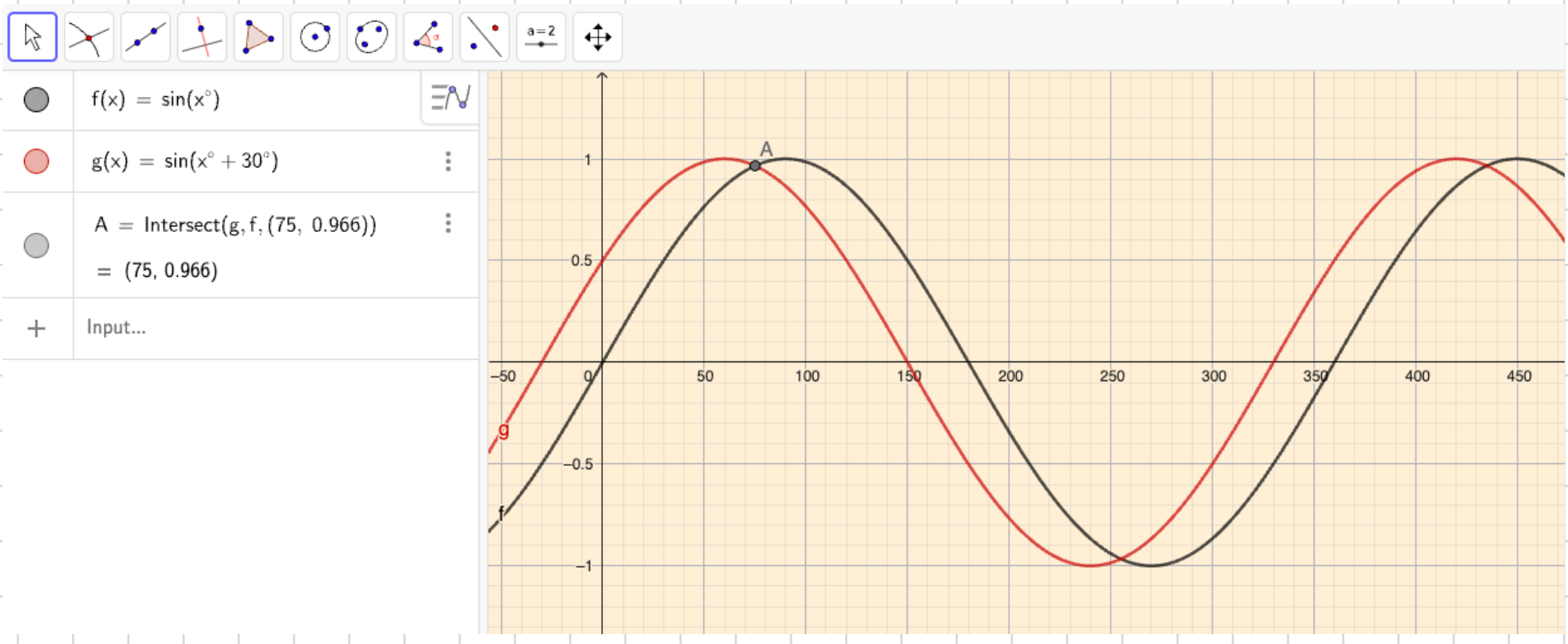
2140.

$x = x + 30^\circ + n \cdot 360^\circ$ (saknar lösning)

$x = 180^\circ - (x + 30^\circ) + n \cdot 360^\circ$

$2x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$

$x = \underline{75^\circ + n \cdot 180^\circ}$



2141 Lös ekvationen $\cos 3x = \cos(x + 40°)$

2141.

$$3x_1 = x_1 + 40° + n \cdot 360°$$

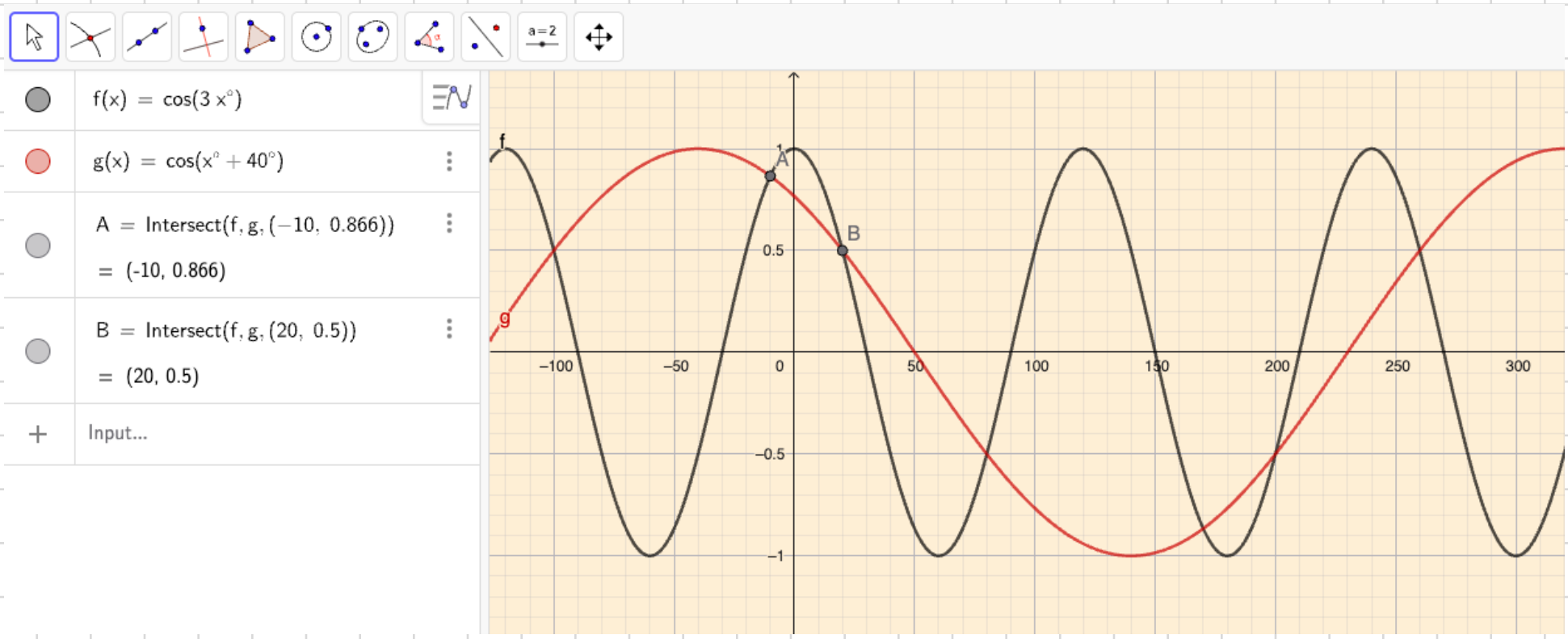
$$3x_2 = -(x_1 + 40°) + n \cdot 360°$$

$$2x_1 = 40° + n \cdot 360°$$

$$4x_2 = -40° + n \cdot 360°$$

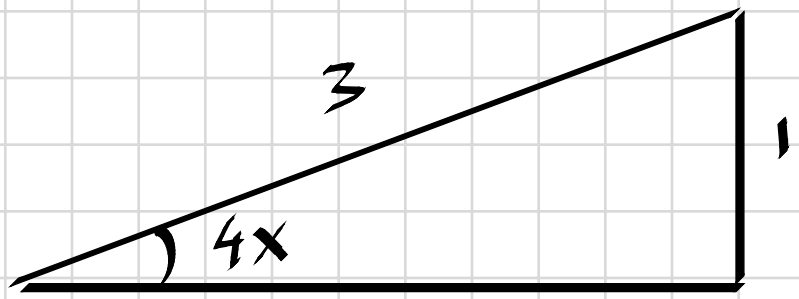
$$x_1 = 20° + n \cdot 180°$$

$$x_2 = -10° + n \cdot 90°$$



2142 I en gammal bok om astrologi kan man läsa att ”… och om man fyrdubblade vinkeln mot den röda stjärnan, så blev sinus för vinkeln lika med 1/3”. Vilka vinklar passar in på den beskrivningen?

2142.



$\sin 4x = \frac{1}{3}$

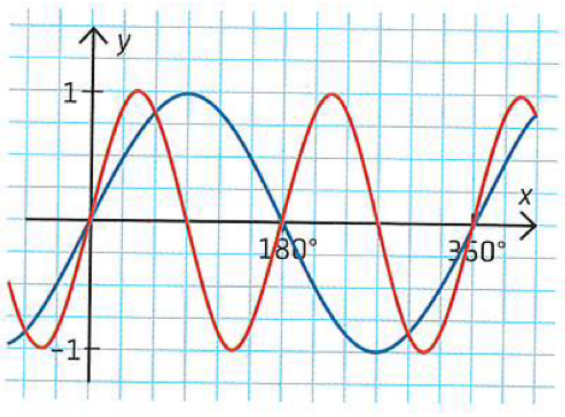
$4x_1 = \arcsin \frac{1}{3} = 19,47°$

$4x_2 = 180° - 19,47° = 160,53$

$x_1 = \underline{4,9°}$

$x_2 = \underline{40,1°}$

2143 Trigonometriska ekvationer kan också lösas med grafiska metoder. Till vilken trigonometrisk ekvation kan man avläsa lösningarna från figuren?



2143. $\sin 2x = \sin x$

2144 Lös ekvationen $(\cos x)^2 + 1 + 2\cos x = 1$

2144. $\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$\cos x(\cos x + 2) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90° + n \cdot 180°$

$\cos x + 2 = 0$ (saknar lösning)

2145 Lös ekvationerna

a) $\sin x = \sin 3x$

b) $\sin x = \cos 40°$

2145.

a) $x_1 = 3x_1 + n \cdot 360°$

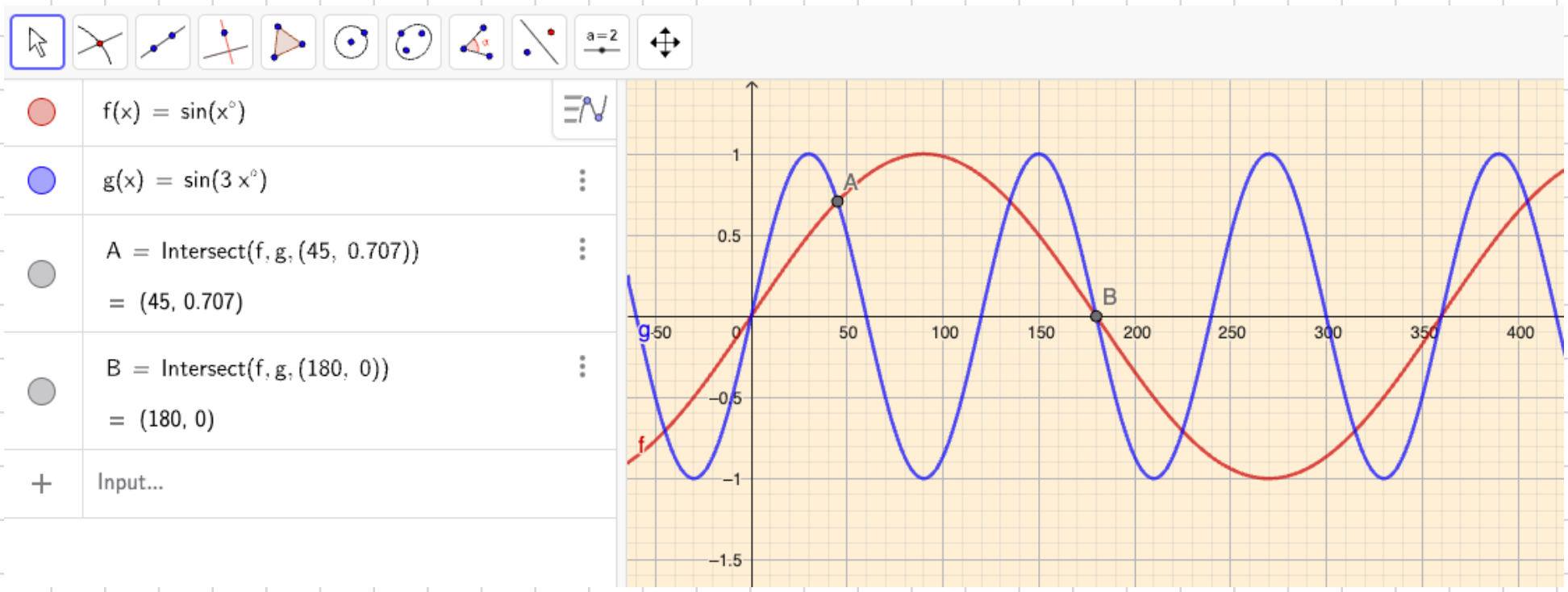
$x_2 = 180° - 3x_2 + n \cdot 360°$

$-2x_1 = n \cdot 360°$

$4x_2 = 180° + n \cdot 360°$

$x_1 = \underline{n \cdot 180°}$

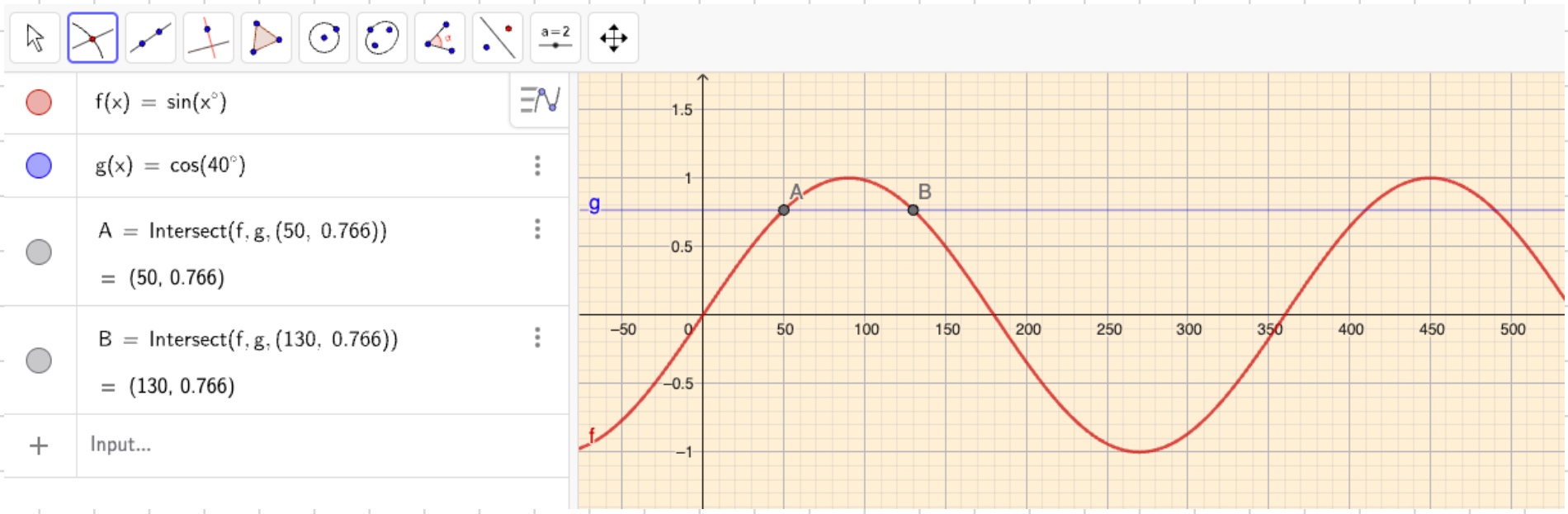
$x_2 = \underline{45° + n \cdot 90°}$



b) $\sin x = \sin(50°)$

$x_1 = \underline{50° + n \cdot 360°}$

$x_2 = 180° - 50° + n \cdot 360° = \underline{130° + n \cdot 360°}$



2154 Vinkeln är angiven i radianer. Lös ekvationerna

a) $\tan(2x - 0{,}2) = 3$

b) $\sin(2x - 0{,}2) = 3$

c) $\cos\left(\frac{x}{2} - 0{,}2\right) = \frac{1}{3}$

2154. a) $2x - 0{,}2 = \arctan 3 + n \cdot \pi$

$x = \underline{\frac{\arctan 3 + 0{,}2}{2}} + n \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{0{,}72 + n \cdot \frac{\pi}{2}}$

b) Saknar lösning

c) $\frac{x_1}{2} - 0.2 = \arccos\frac{1}{3} + n \cdot 2\pi = 1.23 + n \cdot 2\pi$

$\frac{x_2}{2} - 0.2 = -1.23 + n \cdot 2\pi$

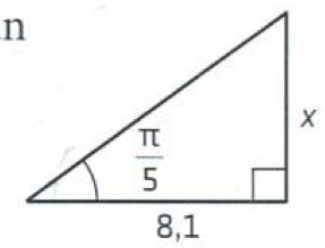
$\underline{x_1 = 2.86 + n \cdot 4\pi \quad , \quad x_2 = -2.06 + n \cdot 4\pi}$

2155 Anders säger till Hasse att han inte riktigt har förstått vinkelmåttet radianer. Hjälp Hasse att förklara för Anders vad radianer är.

2155 Ett vinkelmått primärt för att enkelt kunna derivera trigonometriska funktioner. 2π motsvarar 360° och enhetscirkelns omkrets, medan dess area blir π.

2156 Lisa och Moa har arbetat med följande matteuppgift.

Bestäm längden av sidan markerad med x.



Lisa har fått att $x \approx 5{,}9$ l.e. och Moa har fått att $x \approx 0{,}1$ l.e. Moa inser att hon har fått fel svar, men kan inte förstå vad hon har gjort för fel. Ge ett förslag på vad Moas felaktiga svar sannolikt beror på.

2156. Förmodligen har Moa haft räknaren inställd på grader istället för radianer. Då blir vinkeln endast $0{,}62^\circ$ vilket blir orimligt med hänsyn till figuren.

2157 Henrik, Mathias och Margi diskuterar hur man omvandlar vinklar från radianer till grader.

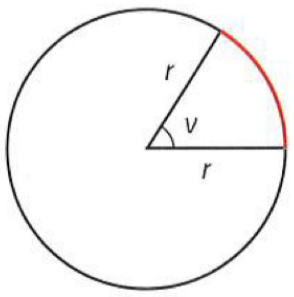
a) Mathias ber Margi förklara hur omvandlingen går till. Hjälp Margi med förklaringen.

b) Henrik säger att han med hjälp av miniräknarens sinusfunktion kan göra omvandlingen utan att utföra någon vanlig beräkning. Hur kan Henrik tänkas göra?

2157. a) 2π motsvar $360°$. Alltså måste

x radianer bli $x \cdot \frac{360}{2\pi} = x \cdot \frac{180}{\pi}$ grader

2158 Bestäm en formel för cirkelsektorns area A, om vinkeln v mäts i



a) grader

b) radianer

c) Beräkna vinkeln v i radianer om cirkelsektorns area är 84 cm^2 och radien är 6,2 cm.

2158. a) $A = \pi r^2 \cdot \frac{v}{360}$

b) $A = \pi r^2 \cdot \frac{v}{2\pi} = \frac{vr^2}{2}$

c) $v = \frac{2A}{r^2} = \frac{2 \cdot 84}{6.2^2} = 4.4$ rad

2210 Bestäm $\tan v$ exakt om $\sin v = \frac{1}{\sqrt{3}}$ och om $\frac{\pi}{2} < v < \pi$.

2210.

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin v}{-\sqrt{1-\sin^2 v}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{3-1}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2211 En cirkel med medelpunkten i origo ritas i ett koordinatsystem. Cirkelns radie är 3 l.e. På cirkelns rand markeras en punkt P i första kvadranten. Linjen genom P och origo bildar vinkeln v med x-axeln. Bestäm exakta värden på koordinaterna för punkten P på cirkelns rand, då $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2211.

$$\cos v = \pm\sqrt{1-\sin^2 v} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

Radien = 3 l.e. $\Rightarrow$ $P = 3\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2212 Visa att $\frac{1-\sin^2 v}{\cos v} = \cos v$

2212.

$$VL = \frac{1-\sin^2 v}{\cos v} = \frac{\cos^2 v}{\cos v} = \cos v \quad \#$$

2213 Förenkla $\dfrac{1}{1+\cos x}+\dfrac{1}{1-\cos x}$

2213.

$$\frac{1-\cos x+1+\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{2}{\sin^2 x}$$

2214 Visa att $1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

2214.

$$VL=1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}=HL \quad \#$$

2215 Vilka exakta värden kan $\tan v$ anta då $\sin v = 0{,}2$?

2215.

$$\sin v=\frac{1}{5}$$

$$\tan v=\frac{\sin v}{\cos v}=\frac{\sin v}{\pm\sqrt{1-\sin^2 v}}=\frac{\frac{1}{5}}{\pm\sqrt{\frac{25-1}{25}}}=$$

$$=\pm\frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{24}}{5}}=\pm\frac{1}{\sqrt{24}}$$

2216 Visa att $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2216.

$$VL = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = HL$$

#

2217 Visa att $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\tan^2 x} = 1$

2217.

$$VL = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1 = HL$$

#

2218 Visa att $\left(\dfrac{1}{\cos x} + \tan x\right)\left(\dfrac{1}{\cos x} - \tan x\right) = 1$

2218.

$$VL = \left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right)\left(\frac{1}{\cos x} - \tan x\right) =$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 = HL$$

#

2219 Visa att $\cos^3 x \cdot \tan^2 x + \cos^3 x = \cos x$

2219.

$$VL = \cos^3 x \cdot \tan^2 x + \cos^3 x = \cos x\left(\cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \cos^2 x\right) =$$

$$= \cos x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \cos x = HL \quad \#$$

2220 Visa att $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

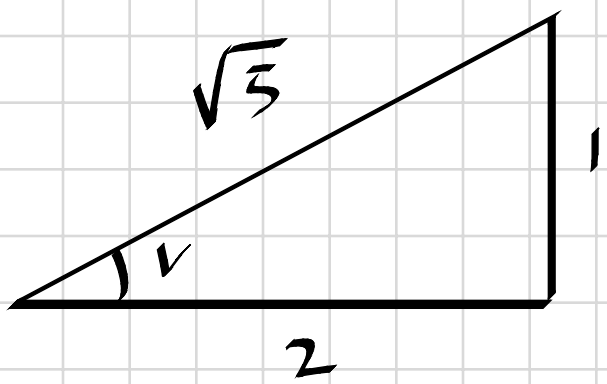
2220.

$$VL = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = HL \quad \#$$

2221 Bestäm det exakta värdet på $\sin v$ om $\tan v = \frac{1}{2}$ och $0° < v < 90°$.

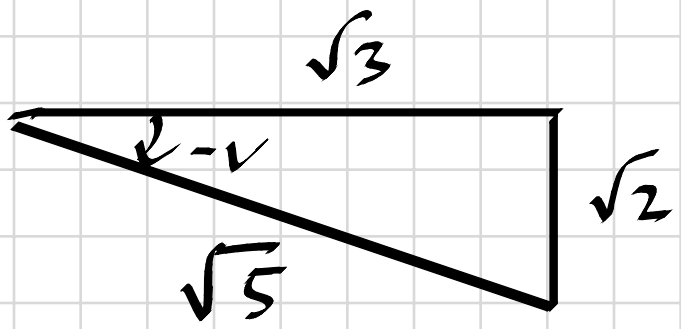
2221.



$$\sin v = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2222 Vilka är de exakta värdena till $\sin v$ och $\cos v$ om $\tan v = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ och $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$.

2222.



$$\sin v = -\sin(-v) = -\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\cos v = \cos(-v) = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

2223 Visa att

$$\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

2223.

$$VL = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} =$$

$$= \frac{\cos x(\cos x - \sin x) + \sin x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \cos x \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 + \sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = HL \qquad \#$$

2224 Visa att $\dfrac{1}{1+\sin v}+\dfrac{1}{1-\sin v}=\dfrac{2}{\cos^2 v}$

2224.

$$VL = \frac{1}{1+\sin v} + \frac{1}{1-\sin v} = \frac{1-\sin v + 1+\sin v}{1-\sin^2 v} =$$

$$= \frac{2}{\cos^2 v} = HL \quad \#$$

2229 Använd enhetscirkeln och försök hitta ett samband som utgår från

a) $\sin(v+180°)$ b) $\cos(v+180°)$

2229.

a) $\sin(v+180°) = -\sin v$

b) $\cos(v+180°) = -\cos v$

2230 Visa att

a) $\sin(450° - v) = \cos v$

b) $\cos(v+270°) = \sin v$

2230.

a) $VL = \sin(450° - v) = \sin(90° - v) = \cos v = HL \quad \#$

b) $VL = \cos(v+270°) = \cos(v-90°) = \cos(90°-v) = \sin v = HL$ $\#$

2231 Visa att

a) $\tan(180° - v) = -\tan v$

b) $\tan(90° - v) = \dfrac{1}{\tan v}$

2231

a) $VL = \tan(180° - v) = \tan(-v) = -\tan v = HL$ #

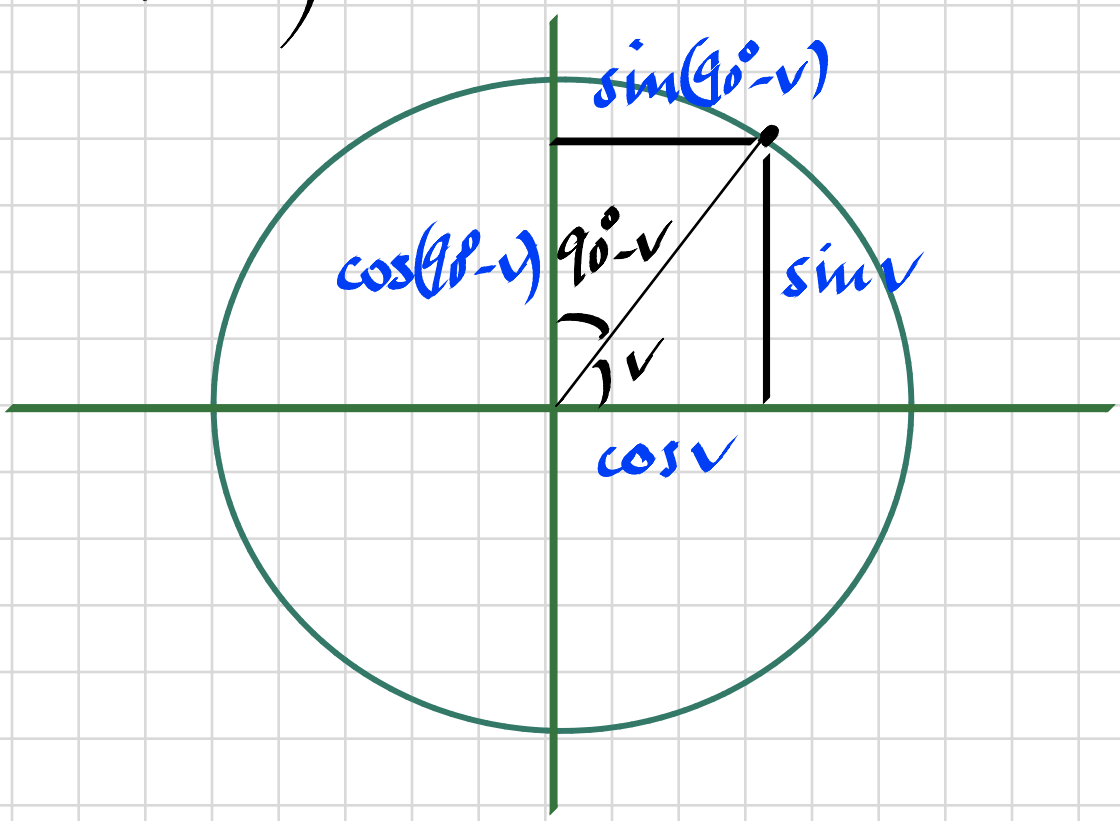
b) $VL = \tan(90° - v) = \dfrac{\sin(90° - v)}{\cos(90° - v)} = \dfrac{\cos v}{\sin v} = \dfrac{1}{\tan v} = HL$ #

2232 Visa med hjälp av enhetscirkeln att

a) $\sin(90° - v) = \cos v$

b) $\cos(90° - v) = \sin v$

2232 a+b)



2240 Förenkla $\sin 2x + (\sin x - \cos x)^2$

2240.

$2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1$

2241 Visa att $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v$ genom att i formeln för $\cos(u + v)$ sätta $u = v$.

2241.

$VL = \cos 2v = \cos(v+v) = \cos v \cdot \cos v - \sin v \cdot \sin v =$

$= \cos^2 v - \sin^2 v = HL$ #

2242 Jonte och Klara har fått i uppgift att lösa ekvationen $\sin 2x = \cos x$. Jonte löser ekvationen på följande sätt

$\sin 2x = \cos x$

$2 \sin x \cdot \cos x = \cos x$ Dividerar båda leden med $\cos x$

$2 \sin x = 1$ Dividerar båda leden med 2

$\sin x = \frac{1}{2}$ har lösningarna $x = 30° + n \cdot 360°$

och $x = 150° + n \cdot 360°$

Klara menar att det är något fel i lösningen. Har hon rätt eller fel? Motivera ditt svar.

2242. $\cos x$ kan var noll $\Rightarrow x = 90° + n \cdot 180°$

2243 Visa att $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x/2}$

2243.

$$VL = \tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{2\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = HL \#$$

2244 Visa att $\sin 3x = (3\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x$

2244.

$$VL = \sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cdot\cos x + \cos 2x\cdot\sin x =$$
$$= 2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot\sin x =$$
$$= (2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x)\sin x =$$
$$= (3\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot\sin x = HL \#$$

2245 Visa att $\frac{1}{1+\cos 2x} = \frac{\tan^2 x}{2} + \frac{1}{2}$

2245.

$$VL = \frac{1}{1+\cos 2x} = \frac{1}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$HL = \frac{\tan^2 x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2\cos^2 x}$$

$HL = VL$ #

2246 Du ska bevisa additionsformeln för cosinus, dvs. du ska visa att
$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$.
Utnyttja att $\cos v = \sin(90° - v)$ och
$\sin v = \cos(90° - v)$.

a) Motivera varför $\cos(u+v)$ kan skrivas $\sin((90° - u) - v)$.

b) Fullfölj beviset genom att använda subtraktionsformeln för sinus.

2246

a) $\cos(u+v) = \sin(90° - (u+v)) = \sin((90° - u) - v)$

b) $\cos(u+v) = \sin(90° - u - v) =$

$= \sin(90° - u) \cdot \cos v - \cos(90° - u) \cdot \sin v =$

$= \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$ #

2247 Bevisa subtraktionsformeln för cosinus, dvs. bevisa att $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$.

2247

$\cos(u-v) = \cos(u+(-v)) = \cos u \cdot \cos(-v) - \sin u \cdot \sin(-v) =$

$= \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$ #

2250 Lös ekvationerna

a) $\cos\left(\frac{x}{2}+180°\right)=-1$

b) $\sin x\cos x=0{,}1$

c) $\sin^2 v=\sin 2v$

d) $\sin x=\sin\frac{x}{2}$

2250. a) $\cos\frac{x}{2}\cdot(-1)-\sin\frac{x}{2}\cdot 0=-1$

$\cos\frac{x}{2}=1$

$\frac{x}{2}=n\cdot 360°$

$x=\underline{n\cdot 720°}$

b) $\frac{1}{2}\cdot\sin 2x=0{,}1$

$2x_1=\arcsin 0{,}2+n\cdot 360°=11{,}5°+n\cdot 360°$

$2x_2=180°-11{,}5°+n\cdot 360°=168{,}5°+n\cdot 360°$

$x_1=\underline{6°+n\cdot 180°}$

$x_2=\underline{84°+n\cdot 180°}$

c) $\sin^2 v=2\sin v\cdot\cos v$

$\sin v(\sin v-2\cos v)=0$

$\sin v=0\Rightarrow v=\underline{n\cdot 180°}$

$\tan v-2=0$

$v=\arctan 2+n\cdot 180°=\underline{63°+n\cdot 180°}$

d)

$$x_1 = \frac{x_1}{2} + n \cdot 360°$$

$$x_2 = 180° - \frac{x_2}{2} + n \cdot 360°$$

$$x_1 = n \cdot 720°$$

$$x_2 = 120° + n \cdot 240°$$

2251 Lös ekvationerna

a) $\tan x = 4 \sin x$

b) $\tan x \cos x + \sin x = 0$

c) $\sin 2x = \sin x \cos x$

d) $\tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0$

2251

a)

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 4 \sin x$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = n \cdot \pi$$

$$\cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{2,3} = \pm \arccos \frac{1}{4} + n \cdot 2\pi \approx \pm 1{,}32 + n \cdot 2\pi$$

b)

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x + \sin x = 0$$

$$2 \sin x = 0$$

$$x = n \cdot \pi$$

c) $2\sin x \cos x = \sin x \cdot \cos x$

$\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = n \cdot \pi$

$\cos x = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

$\Big\} \; x = n \cdot \frac{\pi}{2}$

d) $\tan x = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$

$x_1 \approx 0.39 + n \cdot \pi$

$x_2 = -1.18 + n \cdot \pi$

$\Big\} \; x = 0.39 + n \cdot \frac{\pi}{2}$

2252 Ekvationen $2 \cos x \sin x = 0$ kan lösas för hand på olika sätt. Ge förslag på två metoder som man kan angripa ekvationen med.

2252. ① $\sin 2x = 0$

$x = n \cdot \frac{\pi}{2}$

② $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

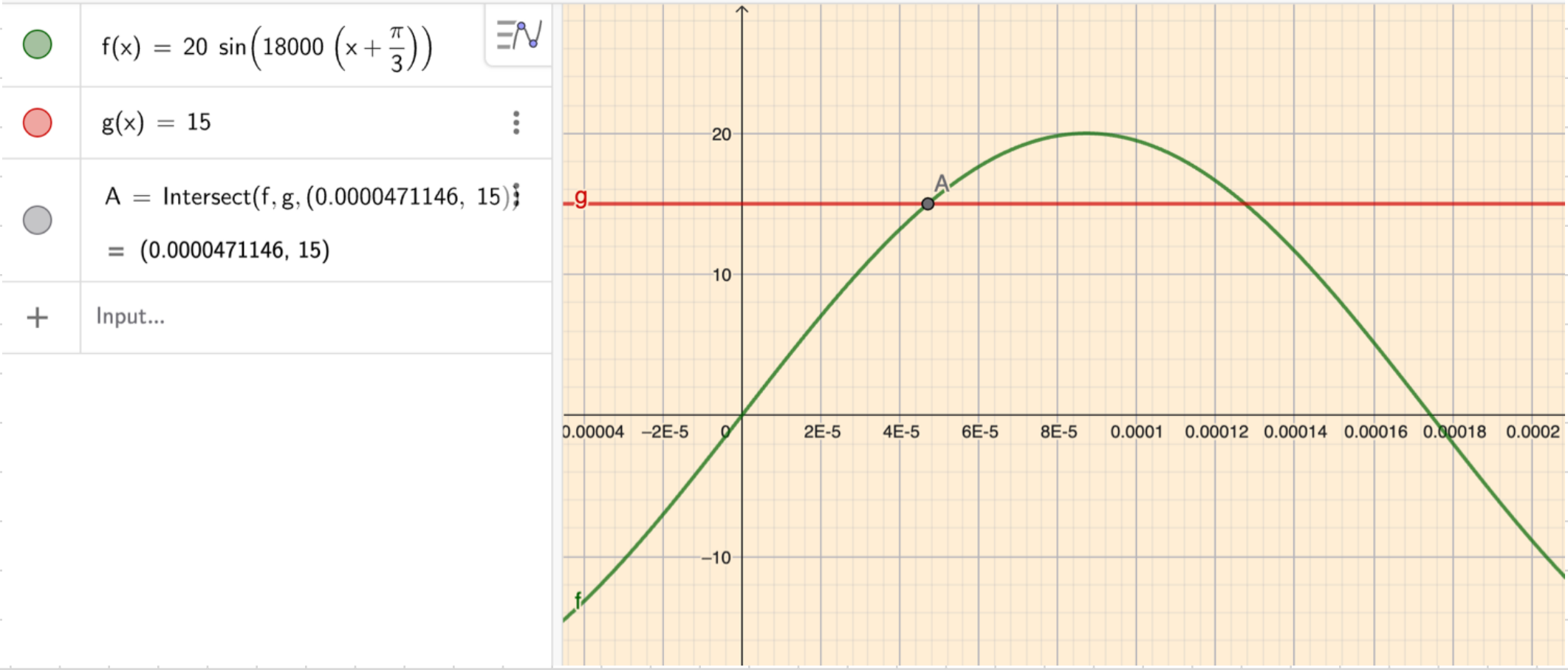
$\sin x = 0 \Rightarrow x = n \cdot \pi$

$\Big\} \; x = n \cdot \frac{\pi}{2}$

2253 Spänningen u volt i en växelströmskrets kan skrivas $u = 20 \sin\left(18\,000\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\right)$, där t är tiden i sekunder efter det att strömmen sluts. Efter hur lång tid blir spänningen 15 volt?

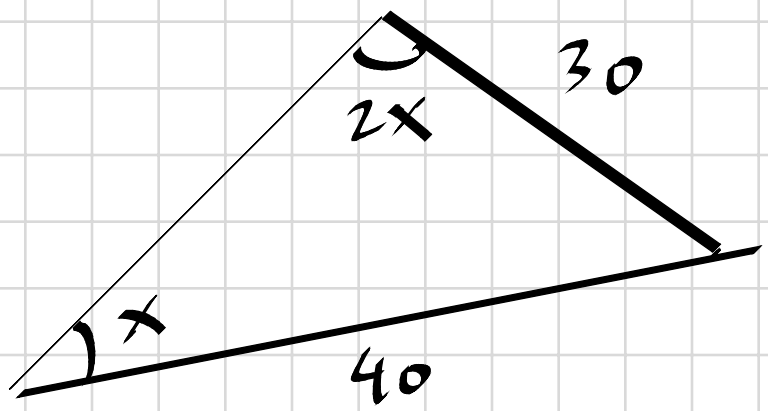
2253.

Geogebra ger $t_1 = 0.047$ ms



2254 I en triangel är två sidor 30 cm och 40 cm. Den ena av de två motstående vinklarna är dubbelt så stor som den andra. Bestäm triangelns vinklar med hjälp av sinussatsen.

2254.



$$\frac{\sin x}{30} = \frac{\sin 2x}{40}$$

$$\frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = \frac{4}{3}$$

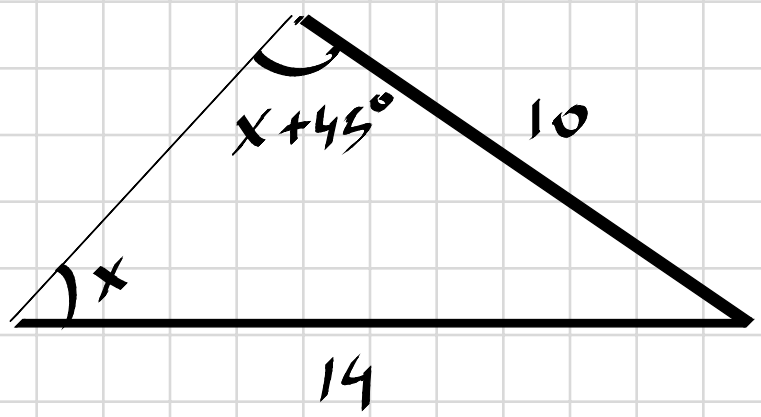
$$\cos x = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm \arccos \frac{2}{3} = 48.2^\circ$$

Vinklarna är $48^\circ, 96^\circ$ och 36°

2255 I en triangel är en vinkel 45° större än en av de andra vinklarna. Sidan som står mot den mindre vinkeln är 10 cm och sidan som står mot den större är 14 cm. Bestäm triangelns vinklar med hjälp av sinussatsen.

2255.



$$\frac{\sin(x+45^\circ)}{14} = \frac{\sin x}{10}$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos 45^\circ + \cos x \cdot \sin 45^\circ}{\sin x} = \frac{14}{10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot \tan x} = \frac{14}{10}$$

$$1 + \frac{1}{\tan x} = \frac{7\sqrt{2}}{5}$$

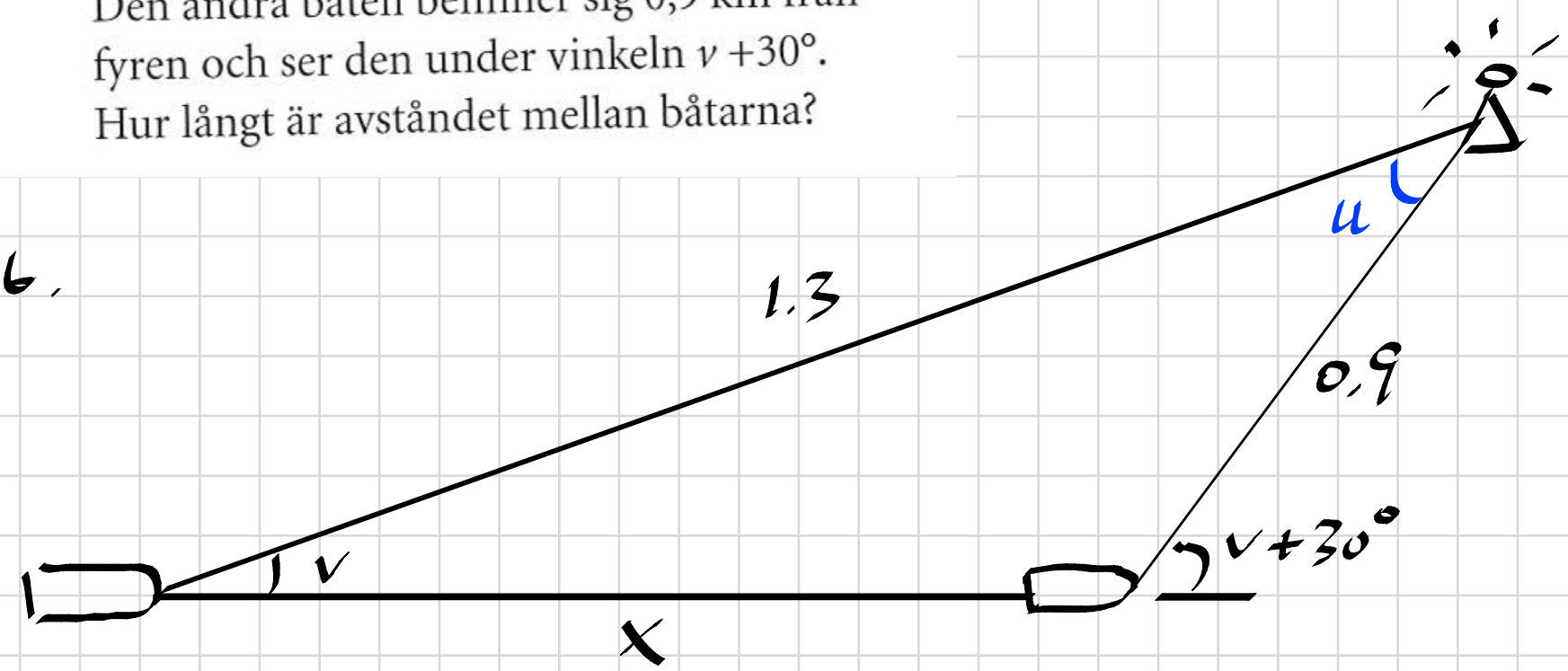
$$\tan x = \frac{5}{7\sqrt{2}-5}$$

$$x = 45.6^\circ$$

Vinklarna är 46°, 91° och 43°

2256 Från två båtar, som rör sig i samma riktning och längs samma räta linje, ser man samtidigt en fyr. En av båtarna är 1,3 km från fyren och ser fyren under vinkeln v från färdriktningen. Den andra båten befinner sig 0,9 km från fyren och ser den under vinkeln $v + 30°$. Hur långt är avståndet mellan båtarna?

2256.



Yttervinkelsatsen ger: $v + 30° = u + v \Rightarrow u = 30° \Rightarrow$

$$x = (1.3^2 + 0.9^2 - 2 \cdot 1.3 \cdot 0.9 \cdot \cos 30°)^{1/2} = \underline{0.69 \text{ km}}$$

2257 För vilka x är uttrycket inte definierat?

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x + 2\cos x + \sin^2 x + 1}$$

2257.

$$\cos 2x + 2\cos x + \sin^2 x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$$

$$(\cos x + 1)^2 = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$\underline{x = \pi + n \cdot 2\pi}$$

2258 Lös ekvationerna fullständigt

a) $\sin x \tan x + \cos x = 1$

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

2258.

a) $\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x} = 1$

$\frac{1}{\cos x} = 1$

$\cos x = 1$

$x = n \cdot 2\pi$

b) $\sin\alpha = -\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$

$\Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$

$x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$

2306 En trigonometrisk ekvation på formen $\sin x = b$ har bland annat lösningarna $x = n \cdot 2\pi$, där n är ett heltal.

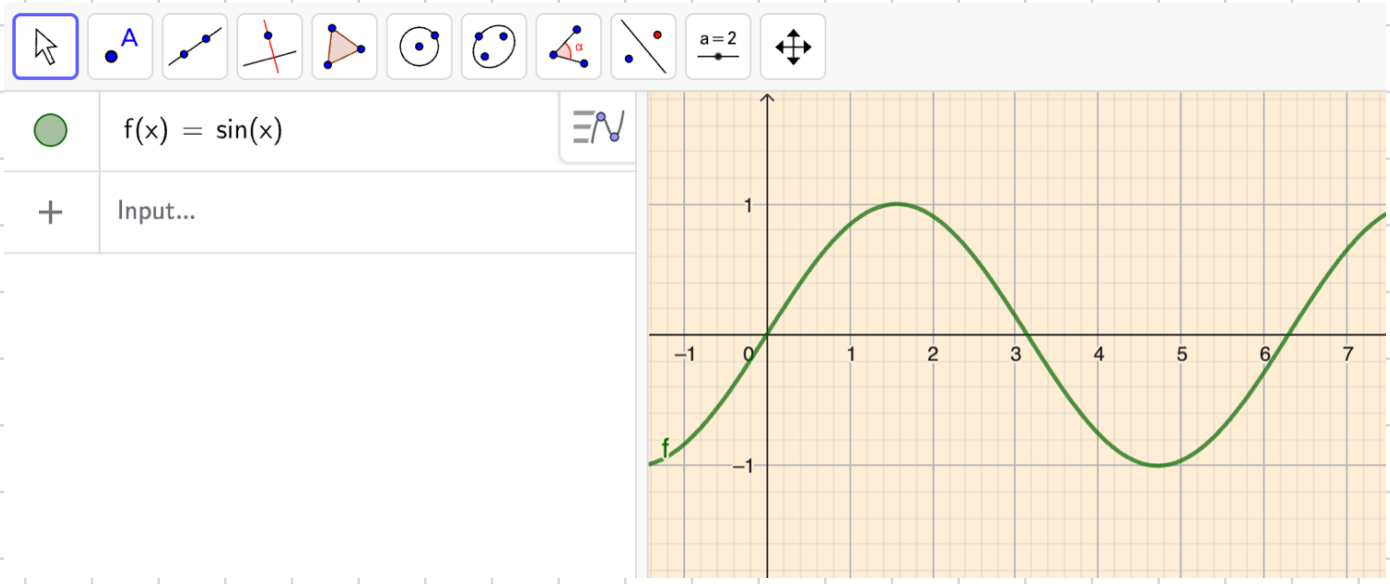
a) Rita grafen till $y = \sin x$.

b) Vilket värde har b?

c) Har ekvationen fler lösningar än de som angetts och i så fall vilka?

2306.

a)



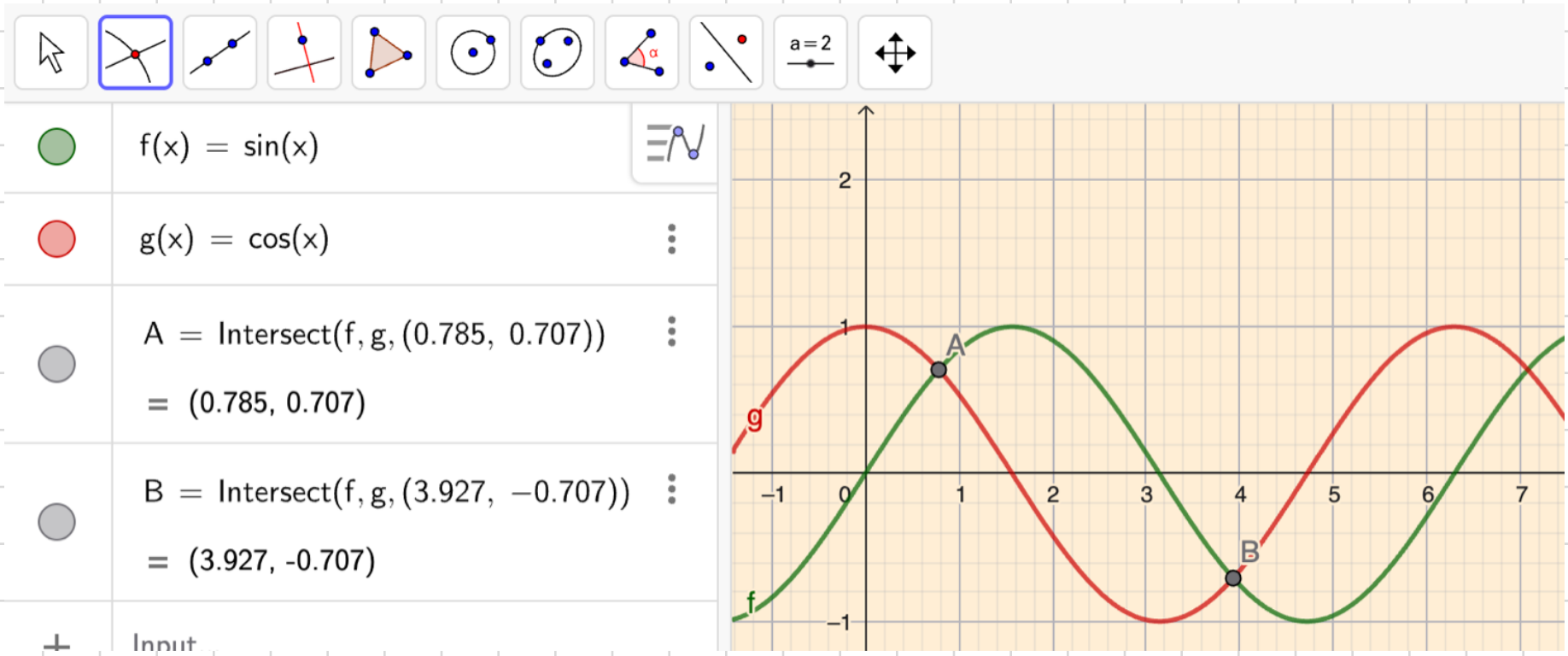
b) $\sin(n \cdot 2\pi) = b \Rightarrow \underline{b = 0}$

c) $\underline{x = \pi + n \cdot 2\pi}$

(Tillsammans kan lösningarna skrivas $x = n \cdot \pi$)

2307 Lös ekvationen $\sin x = \cos x$ grafiskt.

2307.



$$x_1 = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

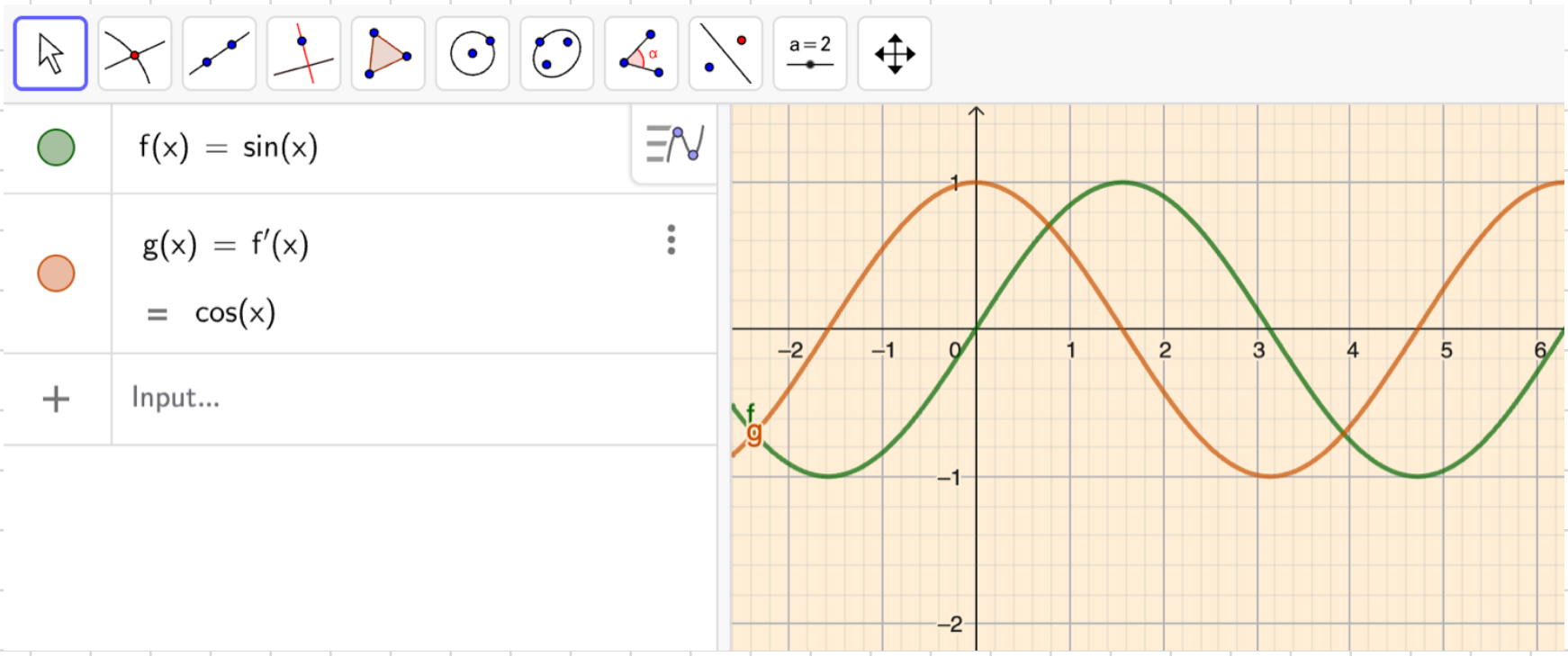
$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

2308 Rita grafen till $y = \sin x$.

a) För vilka värden på x är $y' = 0$?

b) Gör en uppskattning av var y' har sitt största värde.

2308.



a) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

b) $x = n \cdot 2\pi$

2313 Vilket värde på B gör att funktionen får perioden 90°?

a) $y = 2\cos Bx$ b) $y = \sin 2Bx$

c) $y = \cos\frac{x}{B}$ d) $y = 5\sin\frac{3x}{2B}$

2313.

a) $B = \frac{360°}{90°} = 4$

b) $2B = \frac{360°}{90°} \Rightarrow B = 2$

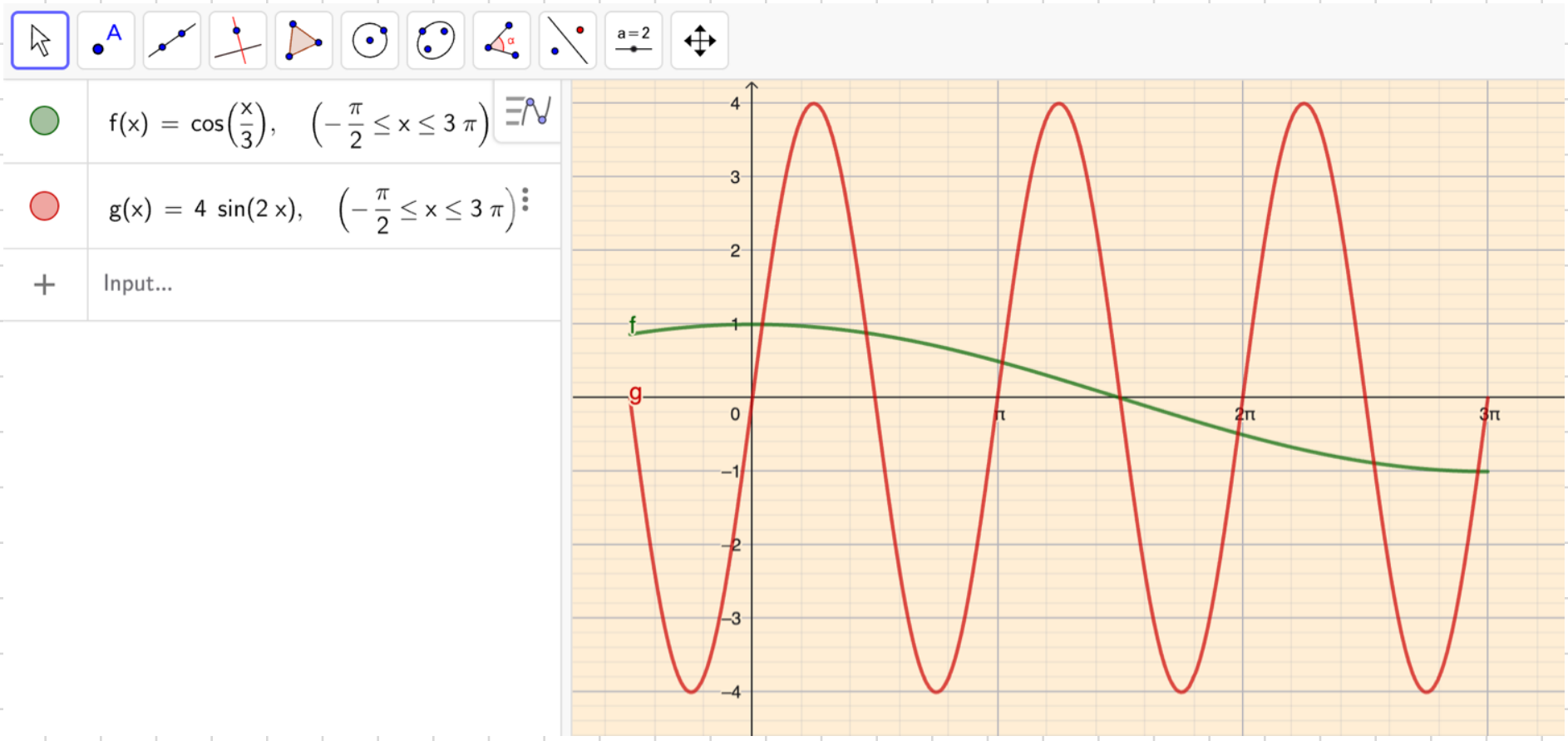
c) $\frac{1}{B} = \frac{360°}{90°} \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{2B} = \frac{360°}{90°} \Rightarrow B = \frac{3}{8}$

2314 Skissa graferna till funktionerna i intervallet $-\frac{\pi}{2} \le x \le 3\pi$.

a) $y = \cos\frac{x}{3}$ b) $y = 4\sin 2x$

2314.



2315 Ange två olika värden på a, som ger funktionen $y = a\sin x$ amplituden 7.

2315 $a=7$ och $a=-7$

2316 Ange funktioner i formen $y = A \sin Bx$ med

a) amplituden 2 och perioden $120°$

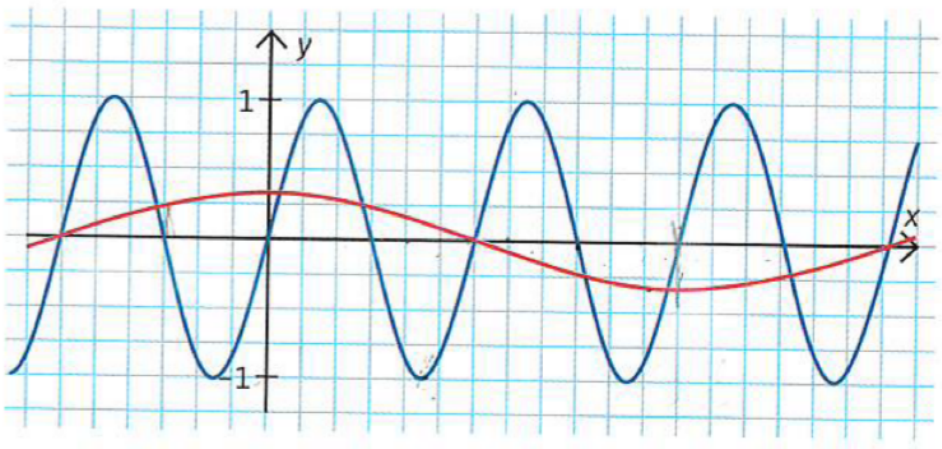
b) amplituden $\frac{2}{3}$ och perioden 4π

2316. a) $y = 2\sin 3x$

b) $y = \frac{2}{3}\sin\frac{x}{2}$

2317 Den röda grafen visar funktionen $y = \frac{1}{3}\cos 2x$.

Den blå grafen visar en funktion av formen $y = A \sin Bx$. Bestäm konstanterna A och B.



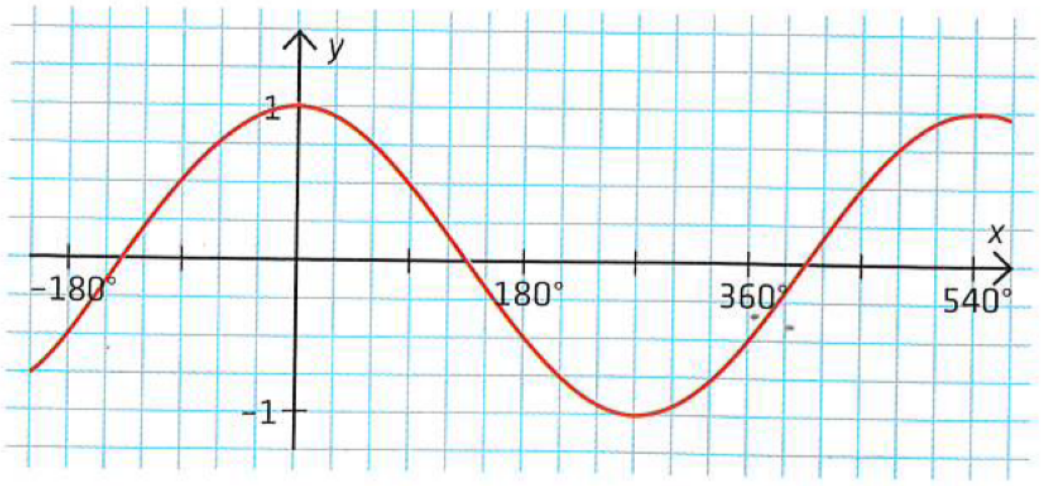
2317. $y = \frac{1}{3}\cos 2x \Rightarrow T_{röd} = \pi \Rightarrow T_{blå} = \frac{\pi}{4}$

$B = \frac{2\pi}{T_{blå}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

$A = 1$, $B = 8$

$y = \sin 8x$

2318 Grafen till funktionen $y = A\cos Bx$ är ritad i figuren. Bestäm konstanterna A och B.



2318.

$A = 1$

$B = \frac{360}{T} = \frac{360^\circ}{540^\circ} = \frac{2}{3}$

$y = \cos\frac{2x}{3}$

2319 Ange funktionsuttryck till två olika trigonometriska funktioner med amplituden 4 och perioden $\frac{5\pi}{4}$.

2319.

$A = 4$

$B = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{4}} = \frac{8}{5}$

$y = 4\sin\frac{8x}{5}$

$y = 4\cos\frac{8x}{5}$

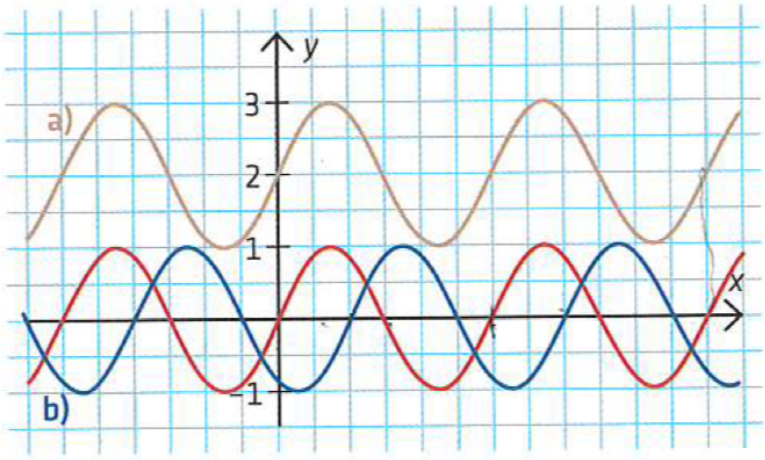
2326 Beskriv hur grafen till $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ är förskjuten i jämförelse med $y = \sin 2x$?

2326.

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$$

Den är förskjuten $\frac{\pi}{8}$ åt vänster.

2327 Den röda grafen visar $y = \sin 2x$. I figuren finns även grafer till två andra funktioner av formen $y = \sin(Bx + C) + D$. Bestäm funktionsuttrycken.



2327. a) Medellinje $y = 2 \Rightarrow D = 2$

Samma frekvens som $y = \sin 2x \Rightarrow B = 2$

Ingen förskjutning mot $y = \sin 2x \Rightarrow C = 0$

$$y_a = \sin 2x + 2$$

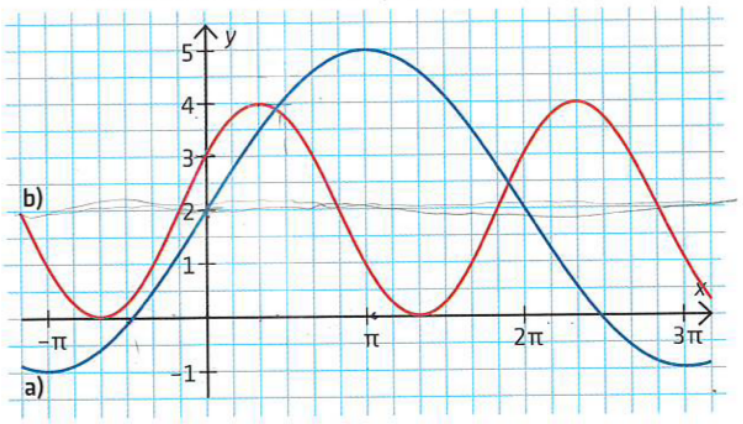
b) Medellinje $y = 0 \Rightarrow D = 0$

Samma frekvens som $y = \sin 2x \Rightarrow B = 2$

Förskjuten $\frac{\pi}{3}$ åt höger $\Rightarrow \frac{C}{B} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow C = -\frac{2\pi}{3}$

$$y_b = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

2328 Graferna till två funktioner av formen $y = A \sin(Bx + C) + D$ är ritade i figuren. Bestäm funktionsuttrycken.



2328.

a) $D = 2$

$B = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

$C = 0$

$A = 3$

$y_a = 3 \sin \frac{x}{2} + 2$

b) $D = 2$

$B = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$\frac{C}{B} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow C = \frac{\pi}{6}$

$y_b = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$

$A = 2$

2329 Uttryck funktionen $y = \cos(2x + 60°) + 1$ med hjälp av en sinusfunktion.

2329.

$\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°) \Rightarrow$

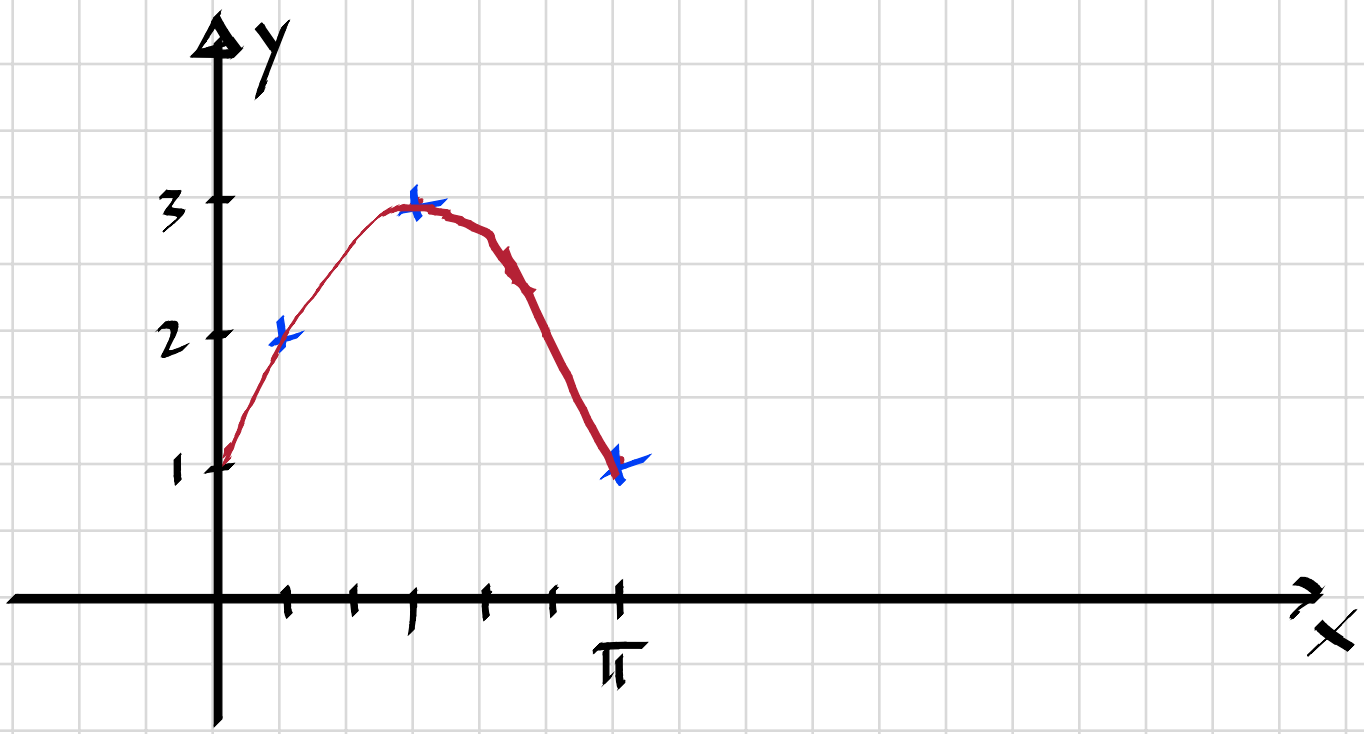
$\cos(2x + 60°) = \sin(2x + 150°)$

$\cos(2x + 60°) + 1 = \sin(2x + 150°) + 1$

2330 ö Ange ett funktionsuttryck $f(x)$ till en trigonometrisk funktion som har

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ och $f(\pi) = 1$.

2330.



$f(x) = 2\sin x + 1$

2331 Förklara varför $f(x) = \sin(x + 10°)$ och $g(x) = \cos(x - 80°)$ ger lika grafer.

2331.

Skillnaden i förskjutningen är $90°$.

2341 Bestäm lösningarna i intervallet $0 \le x \le 180°$ till ekvationerna

a) $\tan x = \sin x$

b) $\tan x = \cos x$

2341. a)

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = 0$$

$$\sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180°$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x_3 = 0° = x_1$$

b)

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \cos x = 0$$

$$\sin x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin x - 1 + \sin^2 x = 0$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x_1 = 38°,\ x_2 = 142°$$

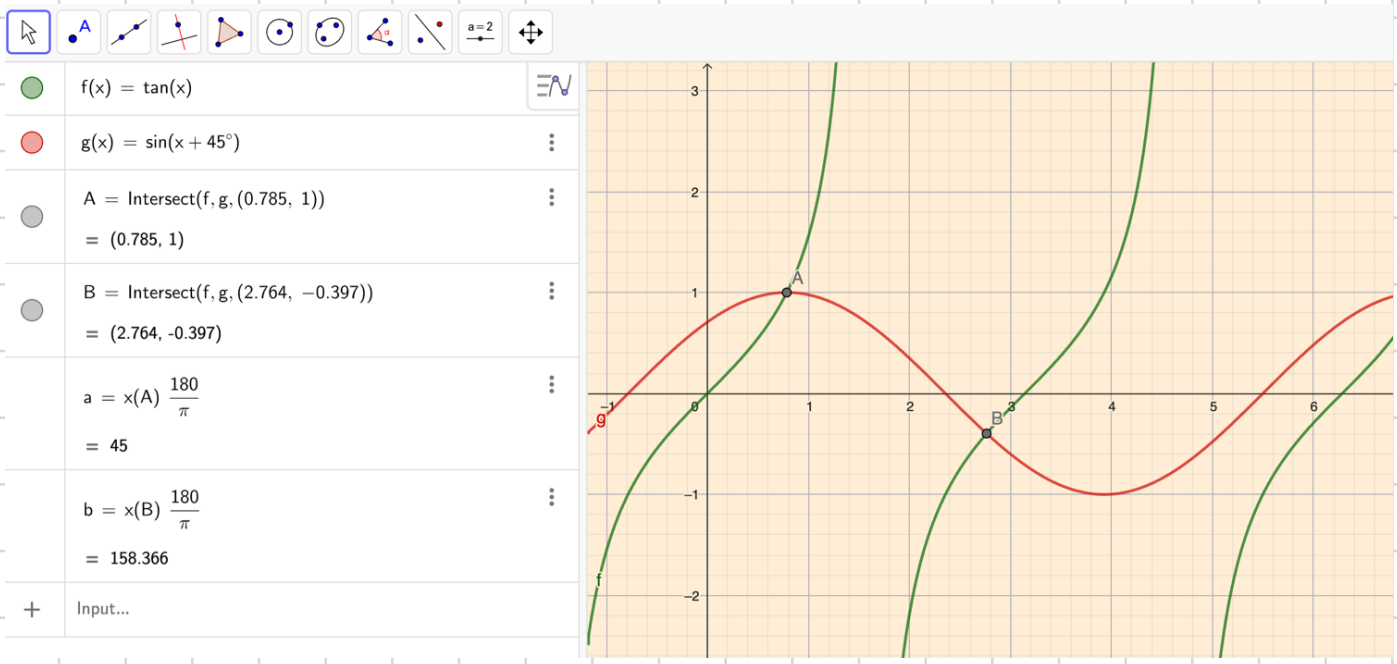
2342 Lös ekvationerna grafiskt

a) $\tan x = \sin(x + 45°)$

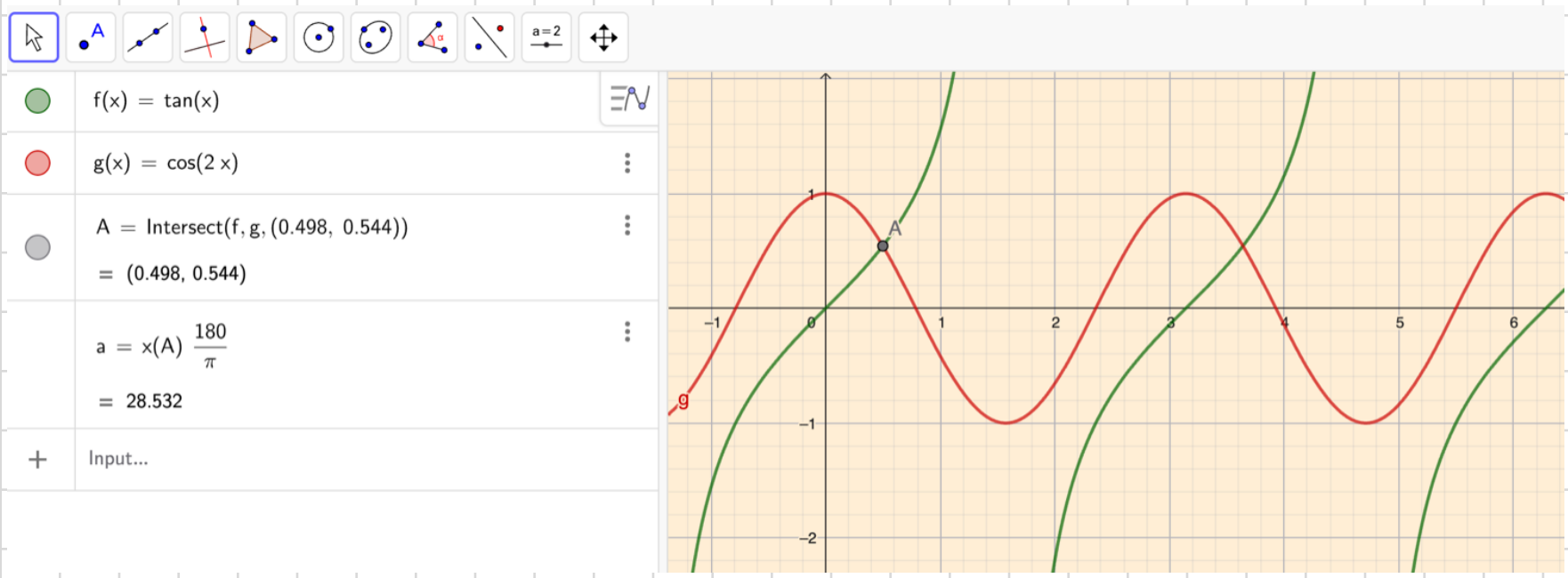
b) $\tan x = \cos 2x$

c) $2\tan\left(\frac{x}{2} + 30°\right) = \sin(x - 30°) + 1$

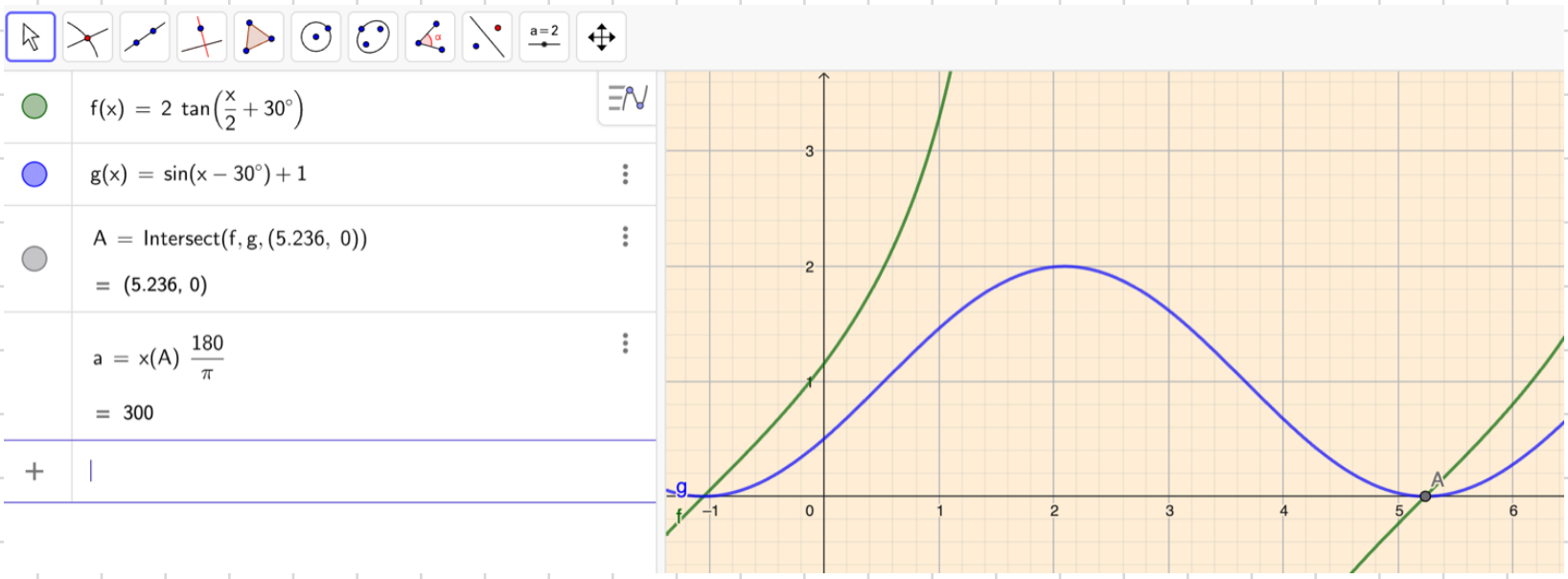
2342. a) $x_1 = 45° + n \cdot 360°$, $x_2 = 158° + n \cdot 360°$



b) $x = 29° + n \cdot 180°$



c) $x = 300° + n \cdot 360°$

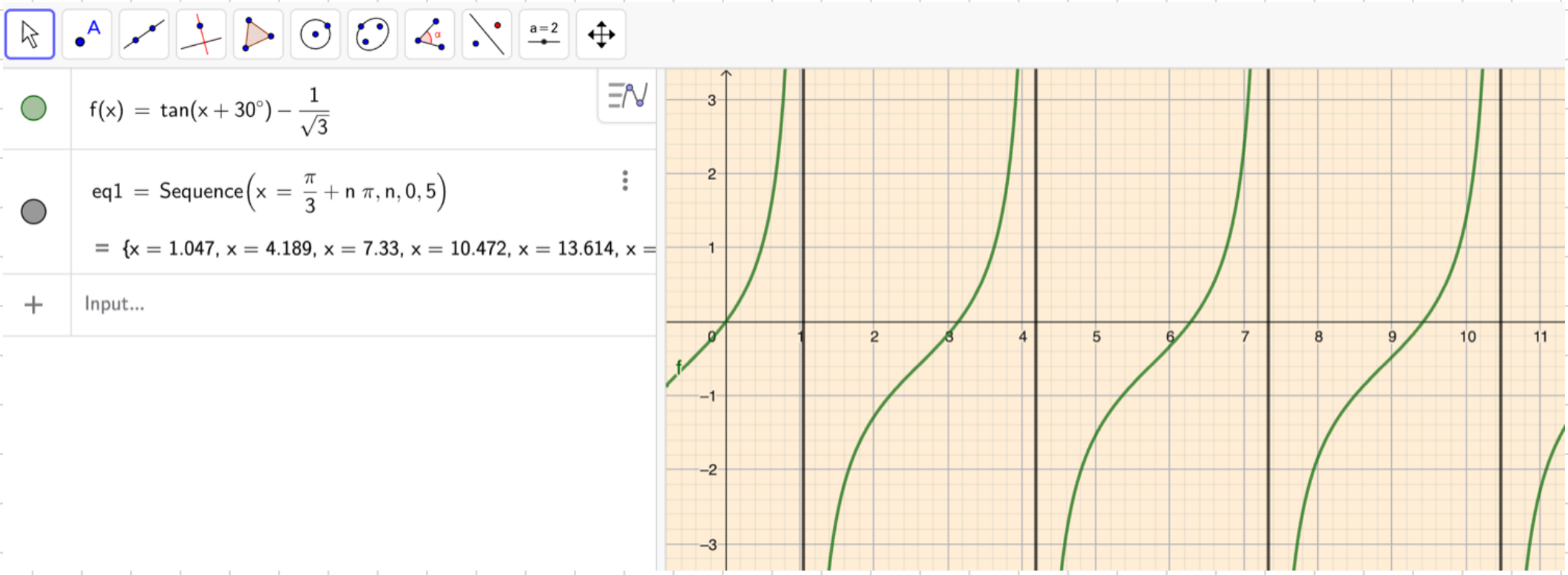


2343 ö Ange en funktion $y = \tan(Bx + C) + D$ med $y(0) = 0$ som inte är definierad för

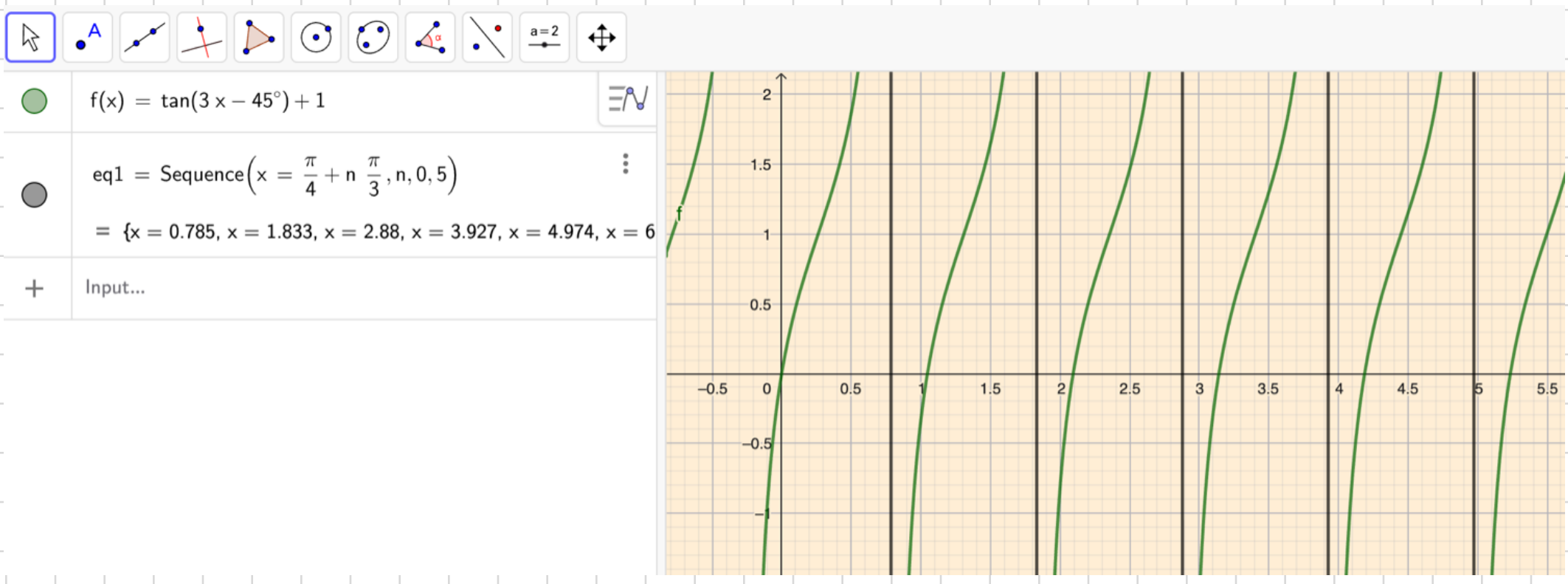
a) $x = 60° + n \cdot 180°$

b) $x = 45° + n \cdot 60°$

2343. a) $y = \tan(x + 30°) - \frac{1}{\sqrt{3}}$



b) $y = \tan(3x - 45°) + 1$



2344 Visa att $\tan x > \sin x$ för alla x i $0 < x < \frac{\pi}{2}$

2344. $\tan x > \sin x \equiv \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x > 0$

$$\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) > 0$$

① $\sin x > 0$ och $\frac{1}{\cos x} - 1 > 0 \Rightarrow \cos x < 1$

② $\sin x < 0$ och $\frac{1}{\cos x} - 1 < 0 \Rightarrow \cos x > 1$ (ej "möjligt)

Endast scenario ① "är "möjligt och "gäller "för alla x i $0 < x < \frac{\pi}{2}$. #

2349 Bestäm funktionernas största och minsta värde

a) $y = 3\sin x + 7\cos x$

b) $y = 2\sin x - \sqrt{5}\cos x$

2349.

a) $y = (3^2+7^2)^{1/2} \cdot \sin(x + \arctan\frac{7}{3})$

$y_{max} = \sqrt{58}$

$y_{min} = -\sqrt{58}$

b) $y = (2^2+5)^{1/2} \cdot \sin(x + \arctan\frac{-\sqrt{5}}{2})$

$y_{max} = 3$

$y_{min} = -3$

2350 Bestäm a i $y = a(\sin x + \cos x)$ så att funktionens största värde blir 1.

2350. $\sqrt{a^2+a^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2}a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2351 Låt $f(x) = 2 \sin (x + 45°)$. Ange funktionsuttrycket i formen $f(x) = a \sin x + b \cos x$.

2351.

(1) $a^2 + b^2 = 2^2$

(2) $\arctan \frac{b}{a} = 45°$

(2): $a = b$

(1): $a^2 + a^2 = 4 \Rightarrow a = b = \sqrt{2}$

$$f(x) = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x$$

2352 Låt $f(x) = A \sin (x + 60°)$.

a) Ge ett förslag på hur $f(x)$ kan se ut i formen $f(x) = a \sin x + b \cos x$.

b) Hur ser $f(x)$ ut i formen $f(x) = a \sin x + b \cos x$ om $A = 16$?

2352.

a) $\frac{b}{a} = \tan 60° = \sqrt{3}$

$A^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + 3a^2 = A^2$

$a = \frac{A}{2}$, $b = \frac{A \cdot \sqrt{3}}{2}$

$f(x) = \frac{A}{2} \sin x + \frac{A \cdot \sqrt{3}}{2} \cos x$

b) $f(x) = 8 \sin x + 8\sqrt{3} \cos x$

2353 Lös ekvationerna

a) $\sin x + \cos x = 1$

b) $3 \sin x + \sqrt{7} \cos x = 2$

2353. a) $\sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$x_1 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= n \cdot 2\pi \\ x_2 &= \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

b) $(3^2 + 7)^{1/2} \cdot \sin\left(x + \arctan \frac{\sqrt{7}}{3}\right) = 2$

$$\sin\left(x + \arctan \frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} - \arctan \frac{\sqrt{7}}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} - \arctan \frac{\sqrt{7}}{3} + n \cdot 2\pi$$

2359 En vikt som är upphängd i en fjäder sätts i rörelse. Viktens maximala avstånd från jämviktsläget är 12 cm och den gör 10 svängningar per sekund. Om man bortser från friktion och luftmotstånd kan rörelsen beskrivas med funktionen $y = A \sin kt$.

a) Bestäm A och k.

b) Hur långt rör sig vikten under en hel svängning?

2359. a) $A = 12$ cm

$k = 2\pi f = 20\pi$

b) $12 + 24 + 12 = 48$ cm

2360 I Malmö ställde en planerare vid värmeverket upp en modell för hur utomhustemperaturen varierade under ett år

$$T(x) = 8 + 8{,}6 \cdot \cos\frac{\pi(x-7)}{6}$$

T är temperaturen i grader Celsius och x är månadens nummer. Använd den givna modellen och bestäm

a) medeltemperaturen under året

b) högsta och lägsta temperaturen

2360. a) $T_{medel} = 8\ ^\circ C$

b) $T_{max} = 8 + 8{,}6 = 16{,}6\ ^\circ C$

$T_{min} = 8 - 8{,}6 = -0{,}6\ ^\circ C$

2361 Växelspänning och växelström kan ofta beskrivas med en sinusfunktion. I våra eluttag har vi växelspänning med frekvensen 50 Hz. Effektivvärdet på spänningen är 230 V. Det innebär att amplituden på funktionen som beskriver växelspänningen är $230\sqrt{2}$ V. Teckna en funktion u, som beskriver växelspänningen $u(t)$ volt.

2361.

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi$

$u(t) = 230\sqrt{2} \cdot \sin 100\pi t$