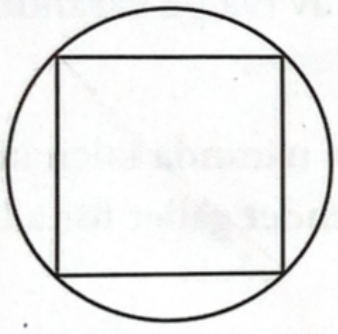
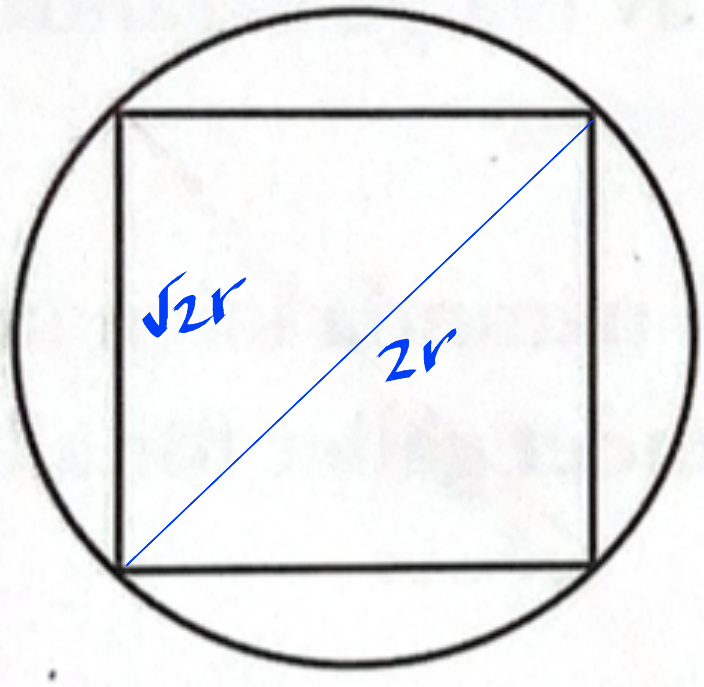
1107 En kvadrat är inskriven i en cirkel. Visa att förhållandet mellan den inskrivna kvadratens area och cirkelns area är $\frac{2}{\pi}$

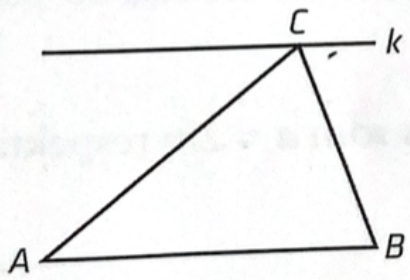




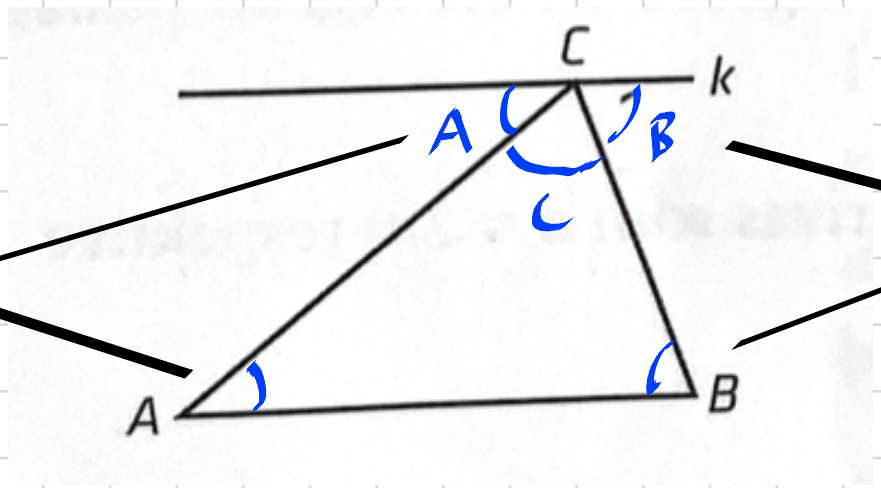
1107.

$$\frac{A_{kv}}{A_c} = \frac{(\sqrt{2}r)^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi} \quad \#$$

1108 I figuren är linjen k parallell med sidan AB. Visa med hjälp av figuren att vinkelsumman i triangeln ABC är 180°.



1108.

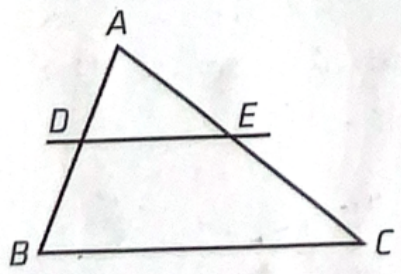


Alternat-vinklar

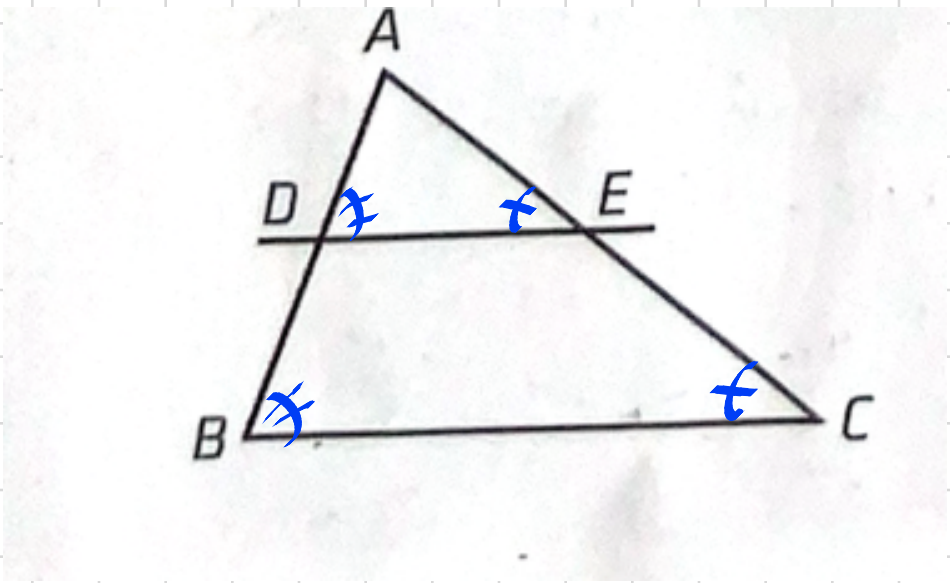
Alternatvinklar

Halvplan: $A + B + C = 180°$ #

1109 Enligt topptriangelsatsen är varje topptriangel som avgränsas av en parallelltransversal likformig med hela triangeln. Bevisa topptriangelsatsen, det vill säga visa att $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.



1109.

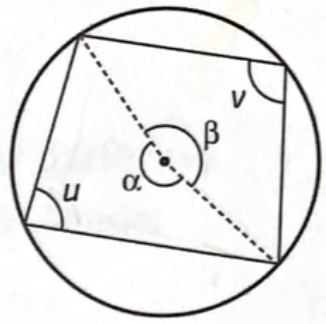


△DEA är likabelägen med △BCA

△ADE — " — △ABC

⇒ 2 lika vinklar ⇒ △ADE ~ △ABC #

1110 Avgör utifrån resonemanget här nedanför om det är bevisat att summan av motstående vinklar i en inskriven fyrhörning är 180°.



Från cirkelns medelpunkt drar vi två radier enligt figuren.

Vinklarna α och β är medelpunktsvinklar som spänner upp var sin cirkelbåge.

Vinklarna u och v är randvinklar.

Av detta följer att $u + v = \dfrac{360°}{2} = 180°$.

Summan av motstående vinklar i en inskriven fyrhörning är 180°. v.s.b.

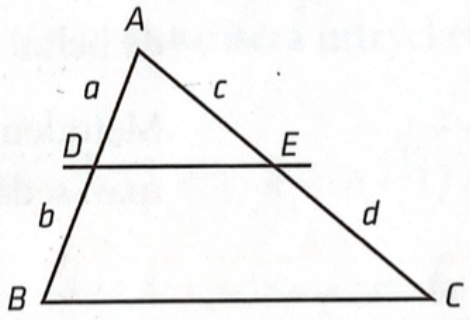
1110. Nja. $\alpha = 2u$

$\beta = 2v$

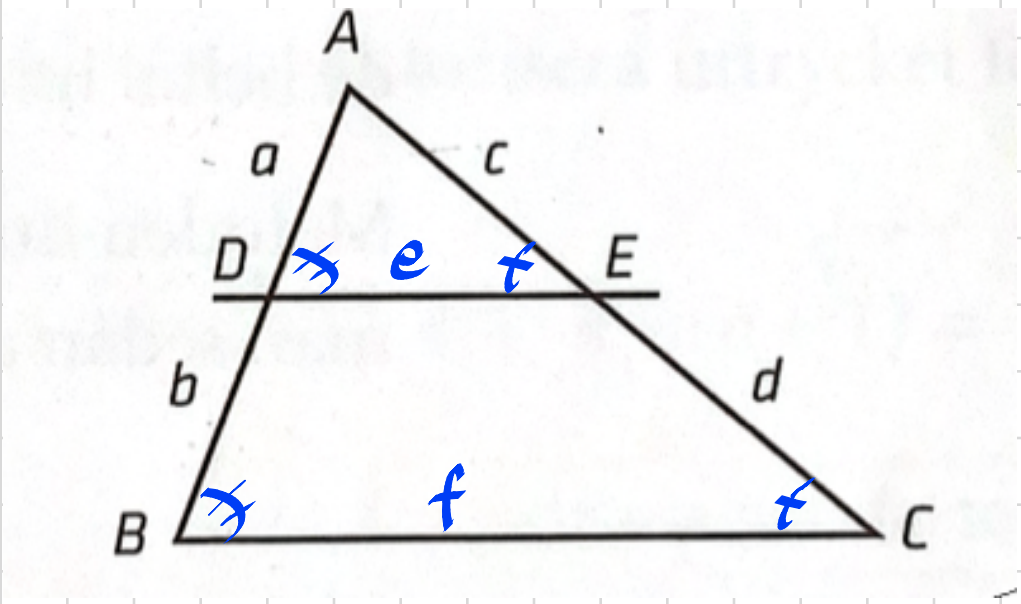
$\alpha + \beta = 360° \Rightarrow 2u + 2v = 360°$

$\Rightarrow u + v = 180°$ #

1111 Enligt transversalsatsen delar en parallell-transversal två sidor i en triangel enligt samma förhållande. Bevisa transversalsatsen, dvs. bevisa att $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ med hjälp av figuren.



111.



Likformighet ger:

(1): $\frac{a}{e} = \frac{a+b}{f} \Rightarrow \frac{e}{f} = \frac{a}{a+b}$

(2): $\frac{c}{e} = \frac{c+d}{f} \Rightarrow \frac{e}{f} = \frac{c}{c+d}$

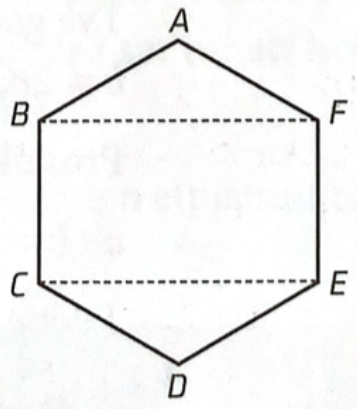
(1+2): $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

$a(c+d) = c(a+b)$

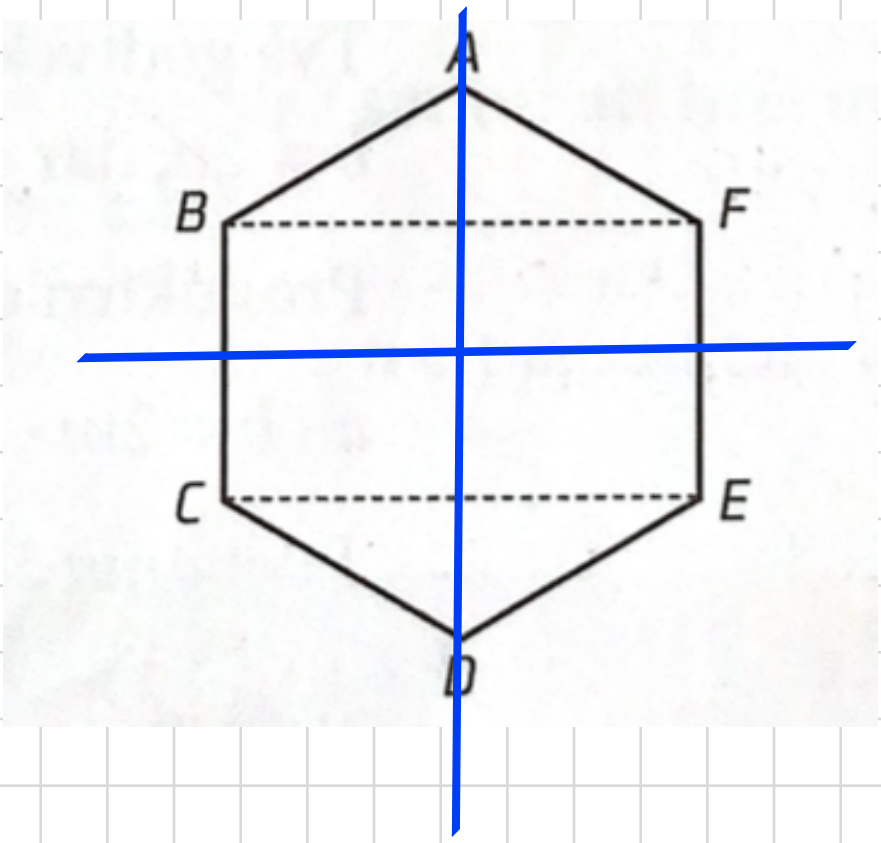
$ad = bc$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ #

1112 I figuren är *ABCDEF* en regelbunden sexhörning. Visa att sträckan *BF* är parallell med sträckan *CE*.



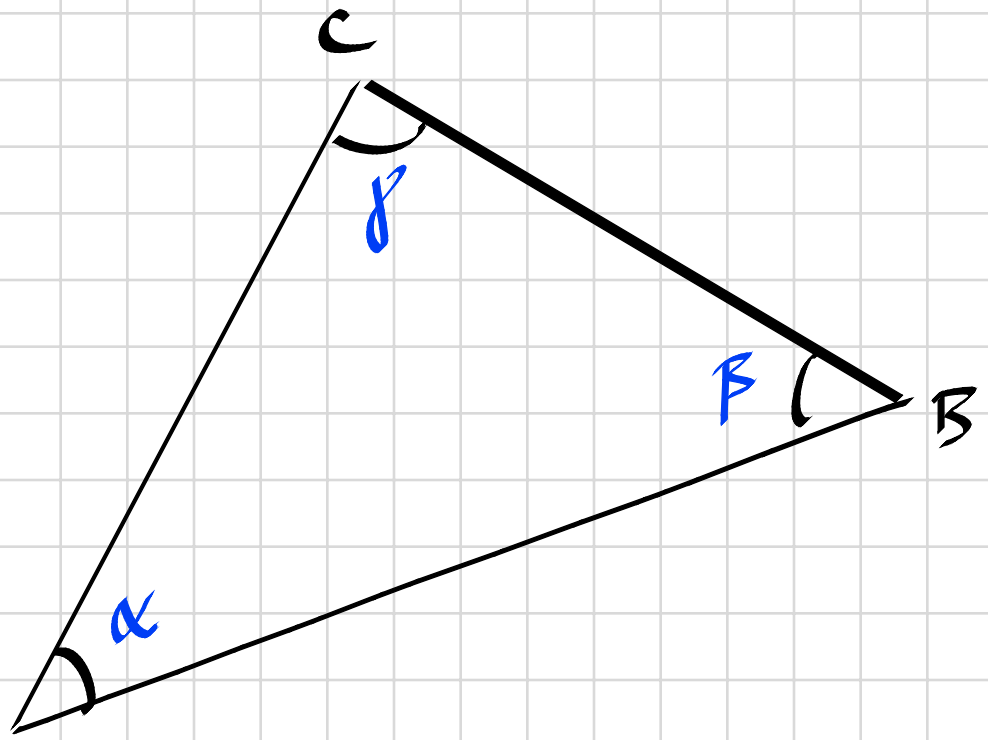
1112.



En regelbunden sexhörning är i sig symmetrisk vilket gör att BF och CE måste vara parallella #

1113 Visa att det i varje triangel finns en vinkel som är större än eller lika med medelvärdet av de övriga två vinklarna.

1113.



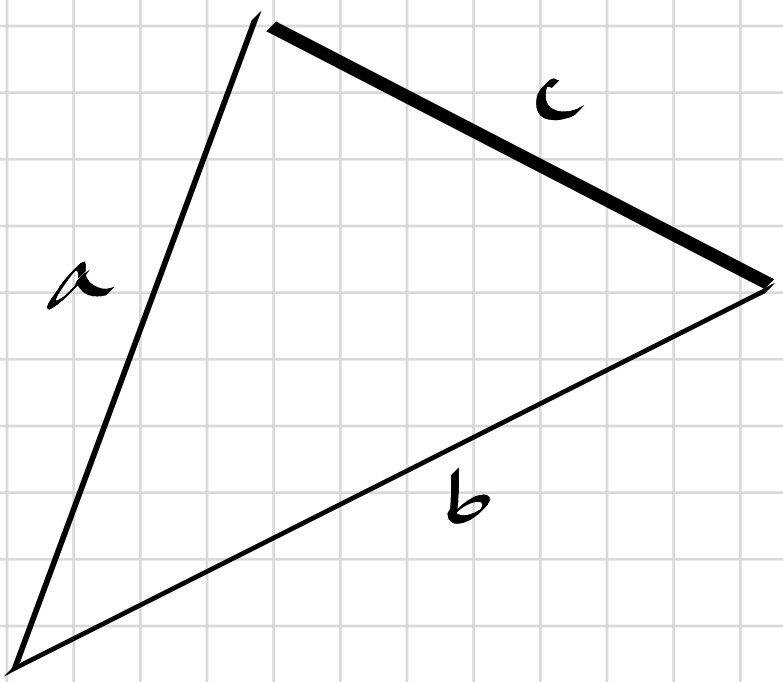
Antag $\alpha \geq \beta \geq \gamma$

$$\alpha \geq \frac{\beta+\beta}{2} \geq \frac{\gamma+\gamma}{2}$$

$$\beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha \geq \frac{\beta+\gamma}{2} \quad \#$$

1114 Visa att det i varje triangel finns en sida vars längd är mindre än eller lika med medelvärdet av de övriga två sidornas längder.

1114.



$a \leq b \leq c$

$a \leq \frac{b+b}{2} \leq \frac{c+c}{2}$

$b \leq c \Rightarrow a \leq \frac{b+c}{2}$

1120 Visa att produkten av fyra på varandra följande heltal är delbar med 4.

1120. $x\cdot(x+1)\cdot(x+2)(x+3)$

Två av talen måste vara jämna och två udda.

Antag x jämnt $\Rightarrow x = 2k$, $x+1 = 2k+1$,

$x+2 = 2k+2 = 2(k+1)$, $x+3 = 2k+3$

$2k(2k+1)\cdot 2(k+1)\cdot(2k+3) =$

$= 4k(2k^2+3k+1)(2k+3) = 4m$ #

1121 Visa att summan av kvadraterna av två på varandra följande heltal är ett udda tal.

1121. $x^2+(x+1)^2$

Antag x jämnt: $x = 2k$

$(2k)^2+(2k+1)^2 = 4k^2+4k^2+4k+1 =$

$2(4k^2+2k)+1 = 2m+1$ #

1122 Visa att beräkningarna enligt mönstret här nedanför alltid kommer att ha resultatet 8 oavsett radnummer.

Rad 1:	$3 \cdot 5 - 1 \cdot 7$
Rad 2:	$4 \cdot 6 - 2 \cdot 8$
Rad 3:	$5 \cdot 7 - 3 \cdot 9$
.	.
.	.
.	.
Rad n:	

1122.

$$x \cdot (x+2) - (x-2)(x+4) =$$

$$= x^2 + 2x - x^2 - 4x + 2x + 8 = 8 \quad \#$$

1130 Du har påståendet
”Om $a \cdot b < 0$, så är antingen $a < 0$ eller $b < 0$”.

a) Formulera motsatsen till påståendet ”antingen $a < 0$ eller $b < 0$”.

b) Bevisa med ett indirekt bevis att ”om $a \cdot b < 0$, så är antingen $a < 0$ eller $b < 0$”.

1130.

a) Om $a \cdot b \geq 0$, så är antingen både $a \geq 0$ och $b \geq 0$ eller både $a < 0$ och $b < 0$.

b) Se a). Detta gör att om $a \cdot b < 0$ så är antingen $a < 0$ eller $b < 0$.

1131 Ruben har fått i uppgift att visa att ”om produkten av två tal a och b är udda, så är båda talen udda”. Han löser uppgiften på följande sätt:

> Antag att minst ett av talen a och b är jämnt. Om a är ett jämnt tal, så gäller att $a = 2n$ där n är ett positivt heltal. Då är
> $a \cdot b = 2n \cdot b$
> Eftersom produkten är delbar med 2, så är ab ett jämnt tal oavsett om b är ett udda eller jämnt tal. Motsvarande gäller om b är ett jämnt tal. Därmed gäller att om produkten av två tal a och b är udda, så är båda talen a och b udda. v.s.b.

Förklara varför Ruben faktiskt kan dra den slutsats som han gör i sitt bevis.

1131. Ruben använder indirekt bevisföring.

Ett direkt bevis kan se ut så här:

$a = 2m+1$, $b = 2n+1 \Rightarrow$

$a \cdot b = (2m+1)(2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1 =$

$= 2(2mn + m + n) + 1 = 2k + 1$ #

1132 Visa med ett indirekt bevis att ”om produkten av två tal a och b är jämn, så är minst ett av talen jämnt”.

1132. Se bevis i 1131.

1133 Visa med ett indirekt bevis att ”om $n^3 + 5$ är ett udda tal, så är n ett jämnt tal”.

1133.

Indirekt bevis:

Om n är ett udda tal så ska n^3+5 vara jämnt.

$n = 2m+1$

$n^3+5 = (2m+1)^3+5 = 8m^3+12m^2+6m+1+5 =$

$= 2(4m^3+6m^2+3m+3) = 2k$ #

1134 Visa att det inte finns ett reellt tal r som är större än alla andra tal.

1134. Indirekt bevis:

Om r är större än alla andra tal så ska det inte finnas något större tal än r.

Men $r+1 > r$, därmed är det ursprungliga påståendet sant #