

Definition av balkspänningar

Vi har tidigare sett hur man beräknar fördelningen av tvärkraft och moment längs en balk. Dessa storheter kan sedan användas för att beräkna påkänningen (spänningen i balken).

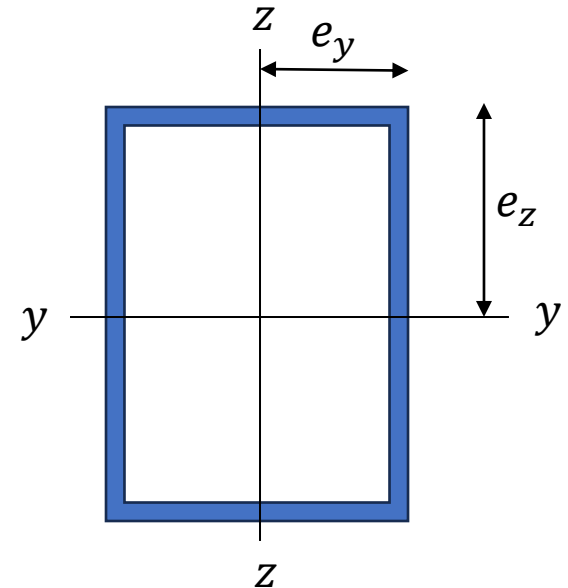
Drag-/tryckspänning definieras som kraften dividerad med tvärsnittsarean. Detta gäller även för skjuvspänning där kraften ligger i samma plan som arean.

Böjspänning och vridskjuvspänning däremot definieras som momentet M dividerat med tvärsnittets böjmotstånd W_b respektive vridmotstånd W_v . I fallet böjning kan det dock ofta vara mer praktiskt att använda tvärsnittets så kallade yttröghetsmoment I . Medan böjmotståndet har enheten mm^3 så har yttröghetsmomentet i stället enheten mm^4 . Tvärsnittet kan till skillnad från böjmomentet beräknas för olika tvärsnittsdelar och därefter adderas ihop till ett totalt yttröghetsmoment.

Drag/Tryckspänning:
$$\sigma_d = \frac{F}{A}$$

Böjspänning:
$$\sigma_{by} = \frac{M_y}{I_y} \cdot e_z \quad \text{resp.} \quad \sigma_{bz} = \frac{M_z}{I_z} \cdot e_y$$

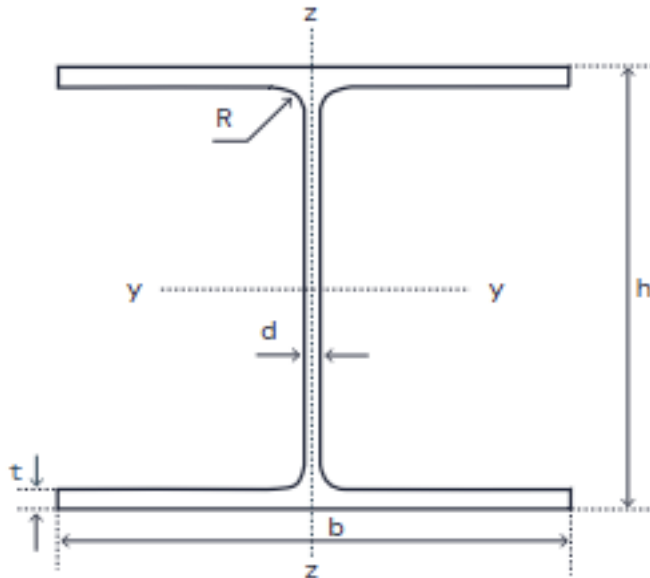
Vridspänning:
$$\tau_v = \frac{M_x}{W_x}$$



e = avståndet från neutrallagret till den spänningpunkt som avses. För vridspänning räknas avståndet från balkens vridcentrum (vilket inte behöver vara detsamma som origo)

Definition av ytttröghetsmoment

För standardprofiler finns i regel angivet storleken på ytttröghetsmomentet i x-, y- och z-led. Ytttröghetsmomentet definieras lika olika för böjning respektive vridning. Nedanstående HEB200-balk får fungera som exempel på beräkning av ytttröghetsmoment.



Tabellvärden HEB200

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

$$t = 15 \text{ mm}$$

$$d = 9 \text{ mm}$$

$$R = 18 \text{ mm}$$

$$A = 7808 \text{ mm}^2$$

$$I_y = 56.96E6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 20.03E6 \text{ mm}^4$$

$$W_x = 39.7E3 \text{ mm}^3$$

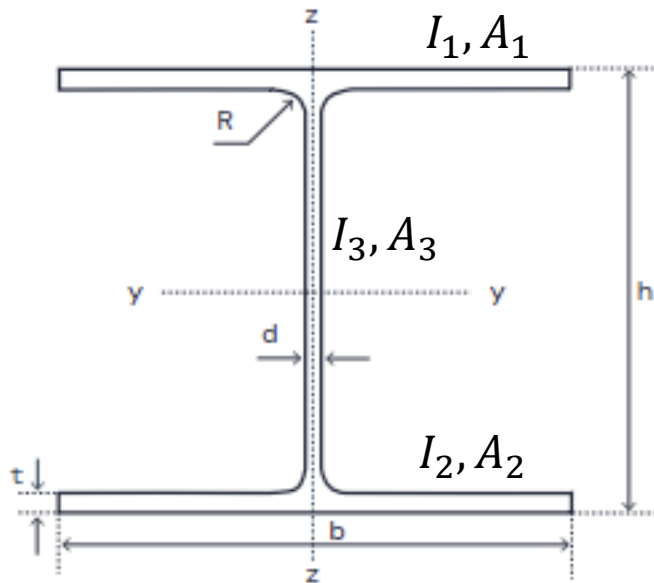
Förutom ur tabeller kan man i regel även få ut tvärsnittsdata i de flesta CAD-program.

Beräkning av yttroghetsmoment

För att handräkna yttroghetsmoment för ett godtyckligt tvärsnitt brukar man utgå från standardgeometrier som ex v rektangel, triangel eller cirkel.

För böjning behöver man också känna till det som kallas Steiners sats:

$$I = \sum_n (I_{0n} + A_n \cdot e_n^2)$$



$$e_{1y} = e_{2y} = \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \quad e_{3y} = 0$$

$$e_{1z} = e_{2z} = e_{3z} = 0$$

$$I_y = I_{01y} + I_{02y} + I_{03y} + A_{1y} \cdot e_{1y}^2 + A_{2y} \cdot e_{2y}^2$$

$$I_z = I_{01z} + I_{02z} + I_{03z}$$

För en solid rektangel med basen b och höjden h definieras yttrogheten som $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$

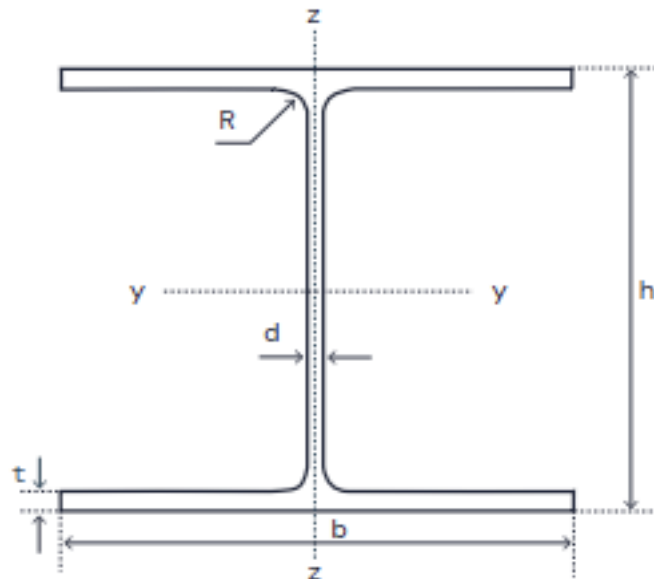
För vridning används istället ofta vridmotståndet W_x med följande approximativa formler:

För öppen profil:

$$W_x = \frac{\sum b_n \cdot t_n^3}{3 \cdot t_{max}}$$

För sluten profil:

$$W_x = 2 \cdot A \cdot t_{min}$$



$$b_1 = b_2 = b \quad b_3 = h - 2t$$

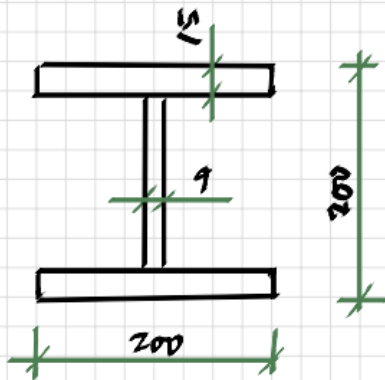
$$t_1 = t_2 = t \quad t_3 = d$$

$$t_{max} = t$$

$$W_x = \frac{1}{3 \cdot t_{max}} \cdot (b_1 \cdot t_1^3 + b_2 \cdot t_2^3 + b_3 \cdot t_3^3)$$

Vridskjuvning är komplext och ovanstående formler kan ge relativt stora avvikelser. För mer precisa värden hänvisas till tabellvärden eller CAD/CAE/FEM-verktyg.

HEB 200



$$I_y = 2 \cdot \frac{200 \cdot 15^3}{12} + \frac{9 \cdot (200 - 2 \cdot 15)^3}{12} + 2 \cdot 200 \cdot 15 \cdot \left(\frac{200 - 15}{2}\right)^2 =$$
$$= 0,11 \cdot 10^6 + 3,68 \cdot 10^6 + 51,34 \cdot 10^6 = \underline{55 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$I_z = 2 \cdot \frac{15 \cdot 200^3}{12} + \frac{(200 - 2 \cdot 15) \cdot 9^3}{12} = 20,0 \cdot 10^6 + 0,01 \cdot 10^6 = \underline{20,10^6 \text{ mm}^4}$$

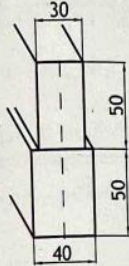
$$W_x = \frac{1}{3 \cdot 15} (2 \cdot 200 \cdot 15^3 + (200 - 2 \cdot 15) \cdot 9^3) = \underline{33 \text{ mm}^3}$$

En jämförelse med tabellvärden ger en avvikelse på 4% för I_y och hela 20% för W_x . Avvikelsen i yttröghetsmomentet kan delvis förklaras med att radiernas inverkan försumrats och formeln av W_x är som tidigare angetts approximativ. Handberäkningar bör därför generellt behandlas som överslag och kontroll av datorberäknade resultat.

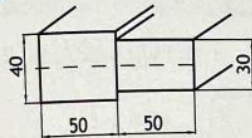
Övningsuppgifter

Beräkna I och W för konstruktionerna nedan.

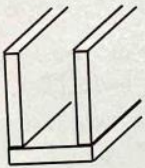
109



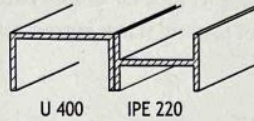
110



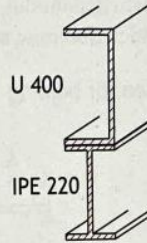
111 Alla brädorna har måtten 100×20 mm.



112 Beräkna tyngdpunkten i y-led.



113 Beräkna tyngdpunkten i y-led.



Tröghetsmoment

- 109 $I = 38 \text{ cm}^4$ (37,9) och $W_b = 19 \text{ cm}^3$
 110 $I = 287 \text{ cm}^4$ och $W_b = 53,5 \text{ cm}^3$
 111 $I = 820 \text{ cm}^4$ och $W_b = 117 \text{ cm}^3$
 112 $I = 1250 \text{ cm}^4$ och $W_b = 164,4 \text{ cm}^3$
 113 $I = 46\,634 \text{ cm}^4$ och $W_b = 1384 \text{ cm}^3$