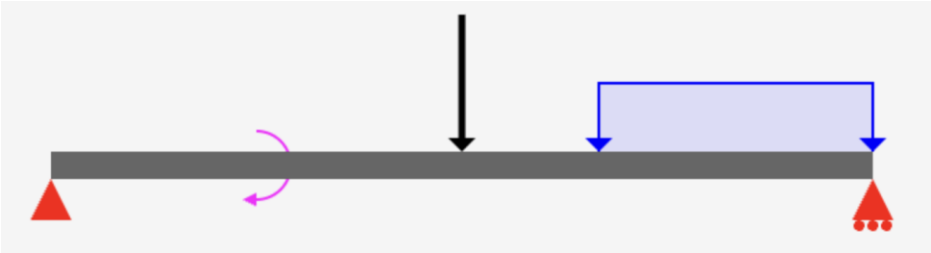
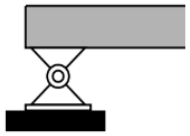
Teknisk Balkteori

Balkteori går ut på att bestämma kraft- och momentfördelningen hos en balk, för att i nästa steg kunna beräkna dess påkänning (spänning) och nedböjning (förskjutning). Ofta är det kanske maxmomentet man är ute efter för att kunna dimensionera balken på ett korrekt sätt.

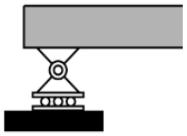
Observera att balkteori ofta även kan tillämpas som en idealisering av mer komplexa geometrier för överslagsberäkning och som en handbokskontroll av mer sofistikerade finita elementanalyser.



Koordinatsystemet definieras ofta som x-axeln i balkens längsriktning, y-axeln i balkens tvärriktning och z-axeln vertikalt uppåt. Balken kan ha olika typer av inspänningar och belastningar. I det tvådimensionella planet kan inspänningarna vara fix (ux, uz, roty), momentfri (ux, uz) eller momentfri och glidande (uz). Belastningarna kan vara i form av punktlast, utbredd last eller momentlast.



momentfri (ux, uz)

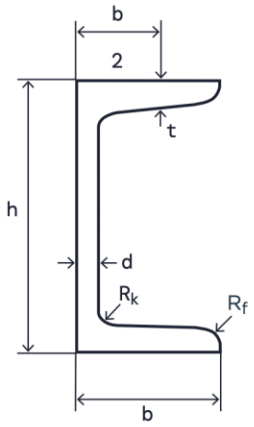


momentfri och glidande (uz)

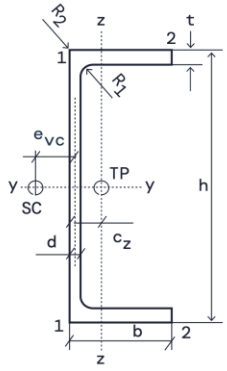
fix (ux, uz, roty)

Balktvärsnitt

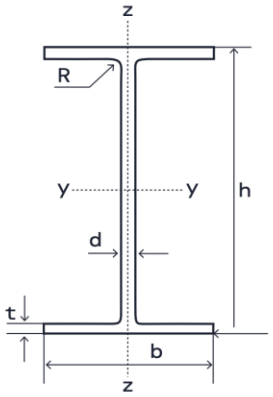
Balken kan ha olika tvärsnitt och ofta håller mig sig till standardiserade profiler. Nedan en bild på de vanligaste:



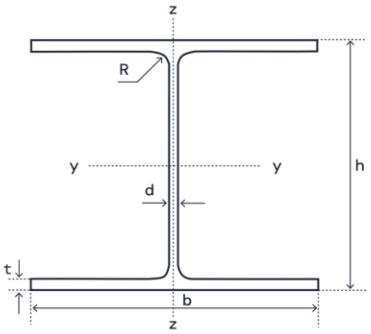
U



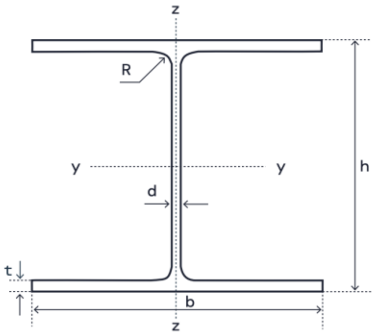
UPE



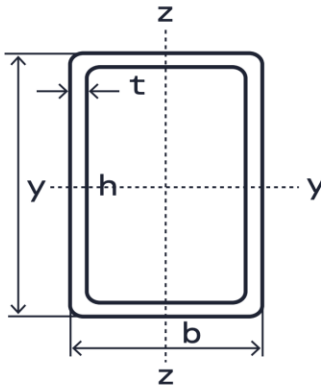
IPE



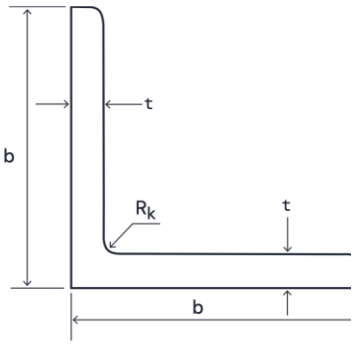
HEA



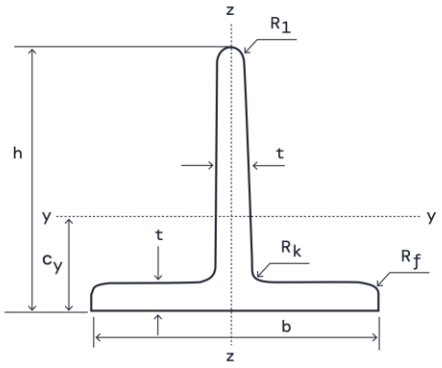
HEB



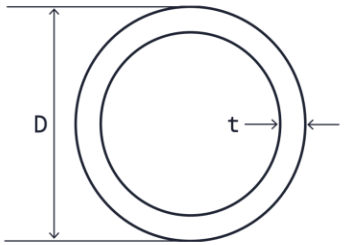
VKR



L-profil



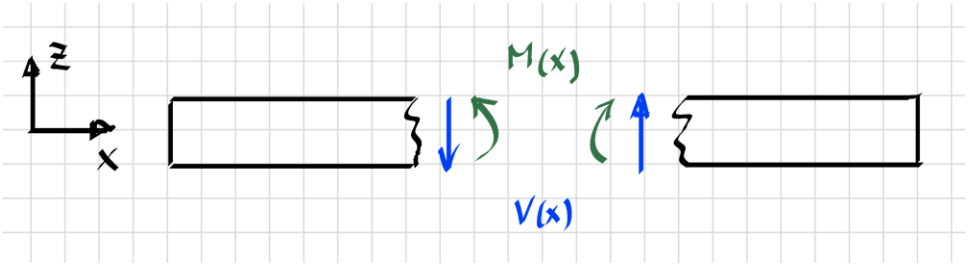
T-profil



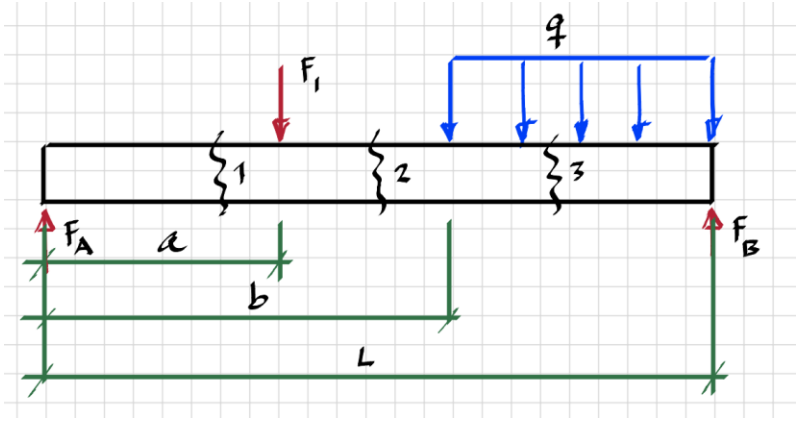
Rörprofil

Kraft- och momentfördelning

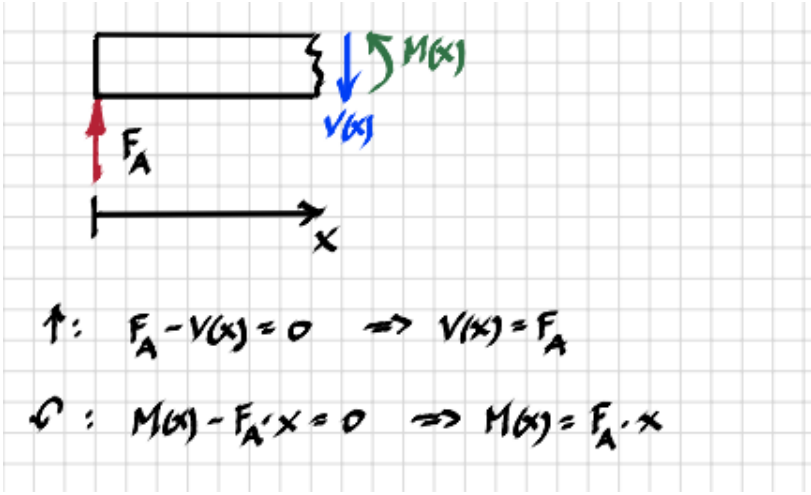
För att kunna bestämma kraft- och momentfördelningen längs balken behöver vi fastställa några konventioner. Om vi tar ett snitt i en balk definieras tvärsnittets kraft V(x) och dess moment M(x) med riktningar enligt figuren nedan. Om vi går från vänster definieras tvärsnittskraftens riktning uppåt och böjmomentet verkar så att vi får en ”leende” balk. Observera att det i litteraturen förekommer motsatta riktningar, men huvudsaken här är att man är konsekvent.



I nedanstående principexempel är balken belastad med en punktkraft F_1 [N] på avståndet a från balkens vänstra ände och en jämnt utbredd last q [N/mm] mellan avståndet b från balkens vänstra ände och dess högra ände. Vi utgår från vänster balkände och tar ut tre snitt enligt figuren nedan:



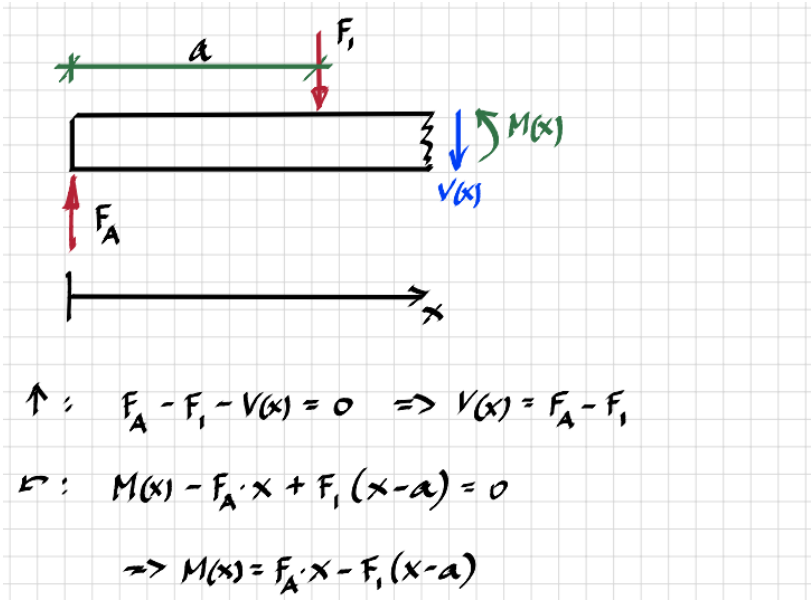
Snitt 1 (x<a):



$\uparrow: \quad F_A - V(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) = F_A$

$\curvearrowleft: \quad M(x) - F_A \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = F_A \cdot x$

Snitt 2 (a<x<b):

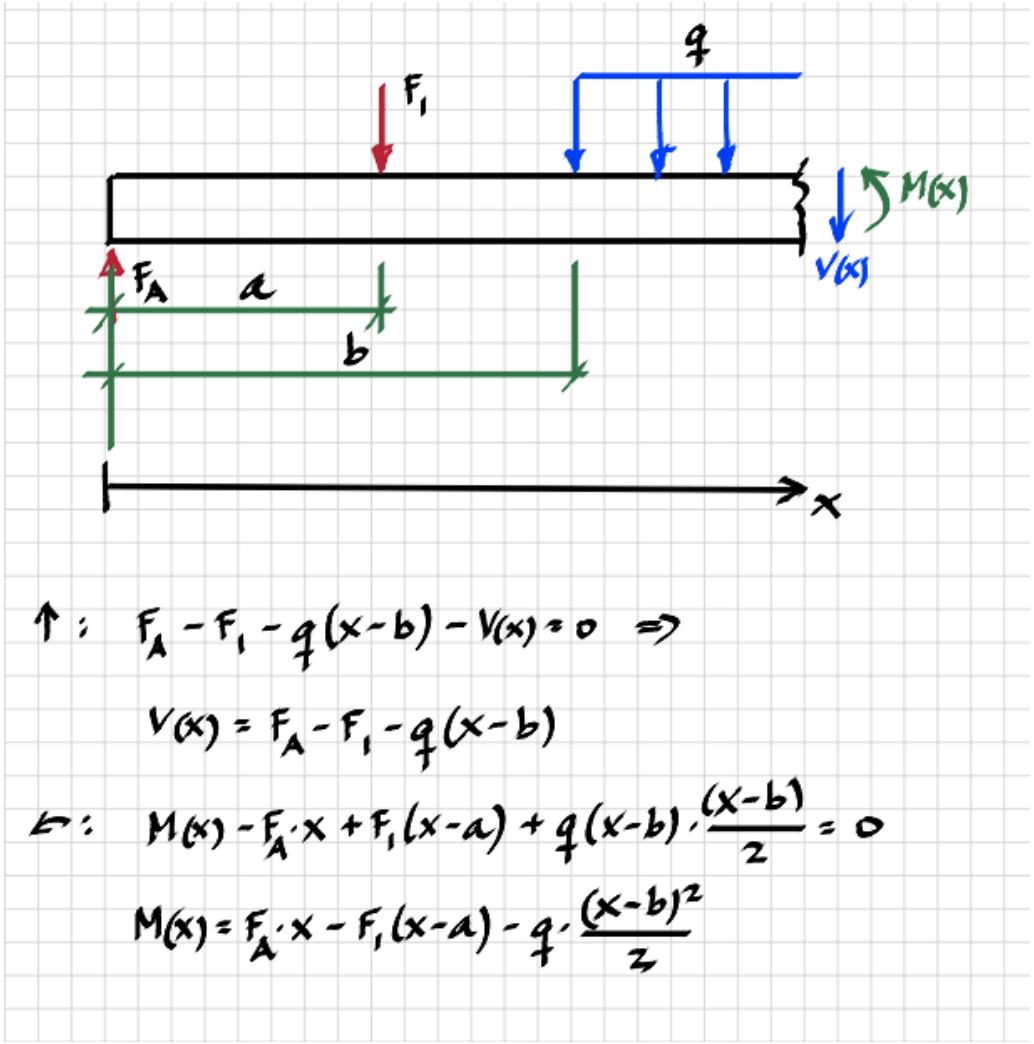


$\uparrow: \quad F_A - F_1 - V(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) = F_A - F_1$

$\curvearrowleft: \quad M(x) - F_A \cdot x + F_1 (x-a) = 0$

$\Rightarrow \quad M(x) = F_A \cdot x - F_1 (x-a)$

Snitt 3 (x>b):



$$\uparrow: \quad F_A - F_1 - q(x-b) - V(x) = 0 \Rightarrow$$

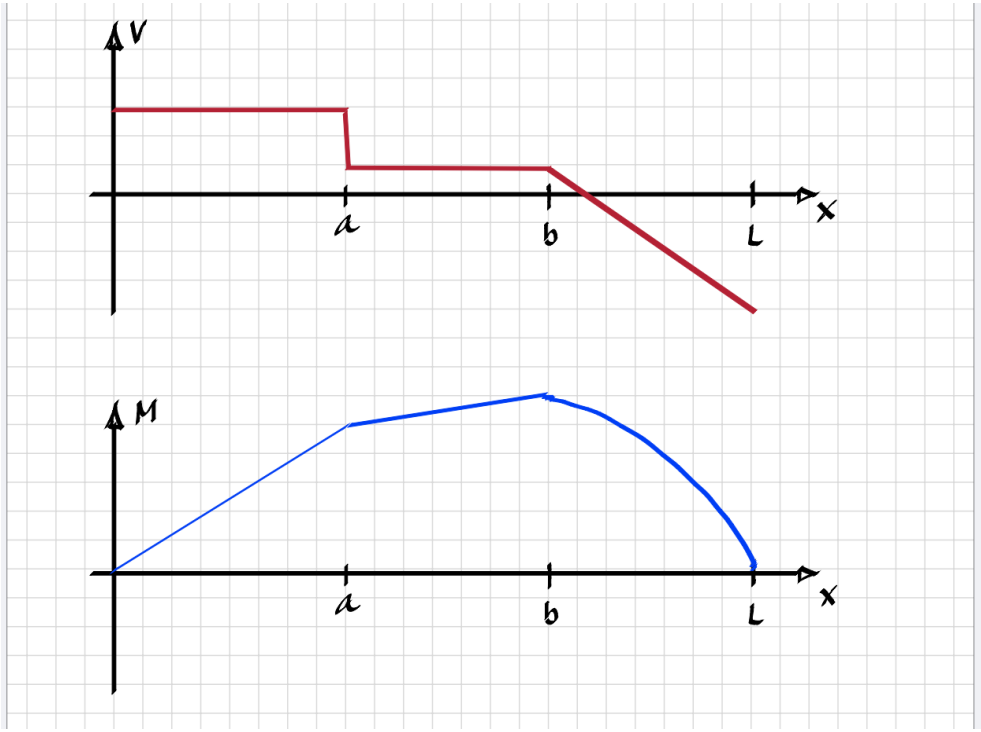
$$V(x) = F_A - F_1 - q(x-b)$$

$$\curvearrowleft: \quad M(x) - F_A \cdot x + F_1(x-a) + q(x-b) \cdot \frac{(x-b)}{2} = 0$$

$$M(x) = F_A \cdot x - F_1(x-a) - q \cdot \frac{(x-b)^2}{2}$$

Kraft- och momentdiagram

Om vi plottar upp tvärsnittskraften V och tvärsnittsmomentet M för några olika x kommer vi att få ett kraft- och momentdiagram enligt nedan. Kraften är konstant i två olika nivåer fram till x = b då den förändras linjärt under den utbredda belastningen. Momentet förändras linjärt med två olika lutningar fram till x = b, varefter den förändras paraboliskt under den utbredda lasten.



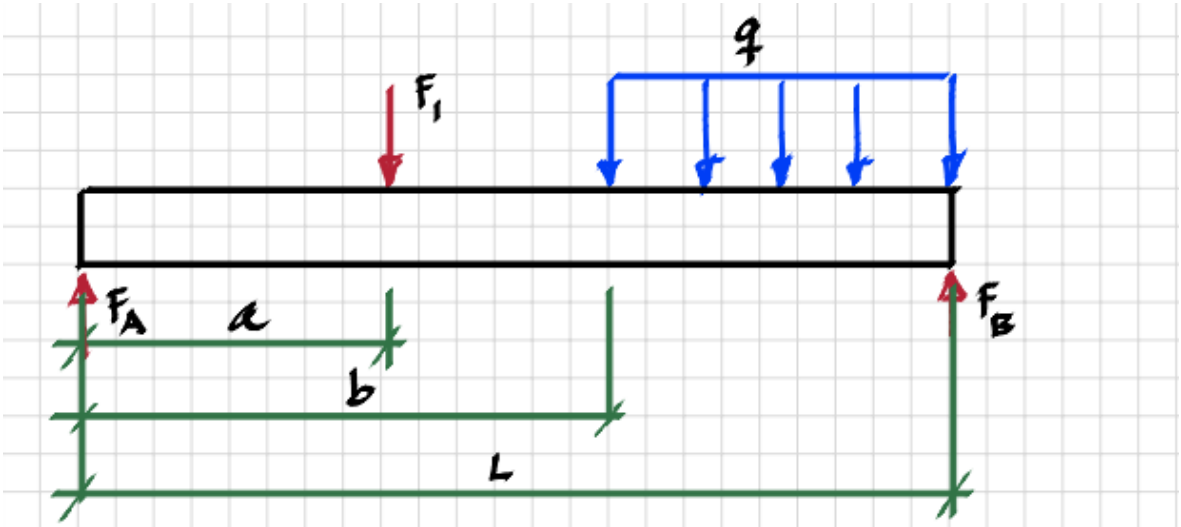
Matematiskt kan man utrycka detta som:

$$\frac{dV}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM}{dx} = V(x)$$

Alternativ beräkningsmetod

Genom att utnyttja stegfunktionen U(x-α) kan man skriva V(x) och M(x) som en sammanhängande funktion.



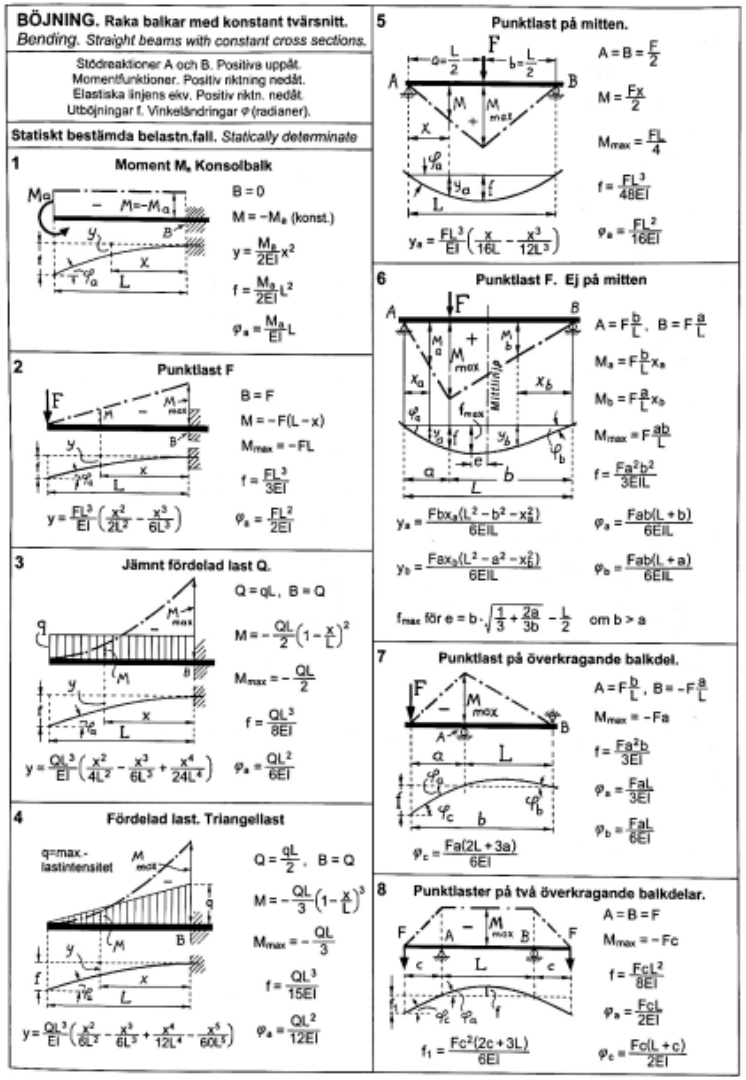
$$u(x-\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq \alpha \\ 0 & \text{om } x < \alpha \end{cases}$$

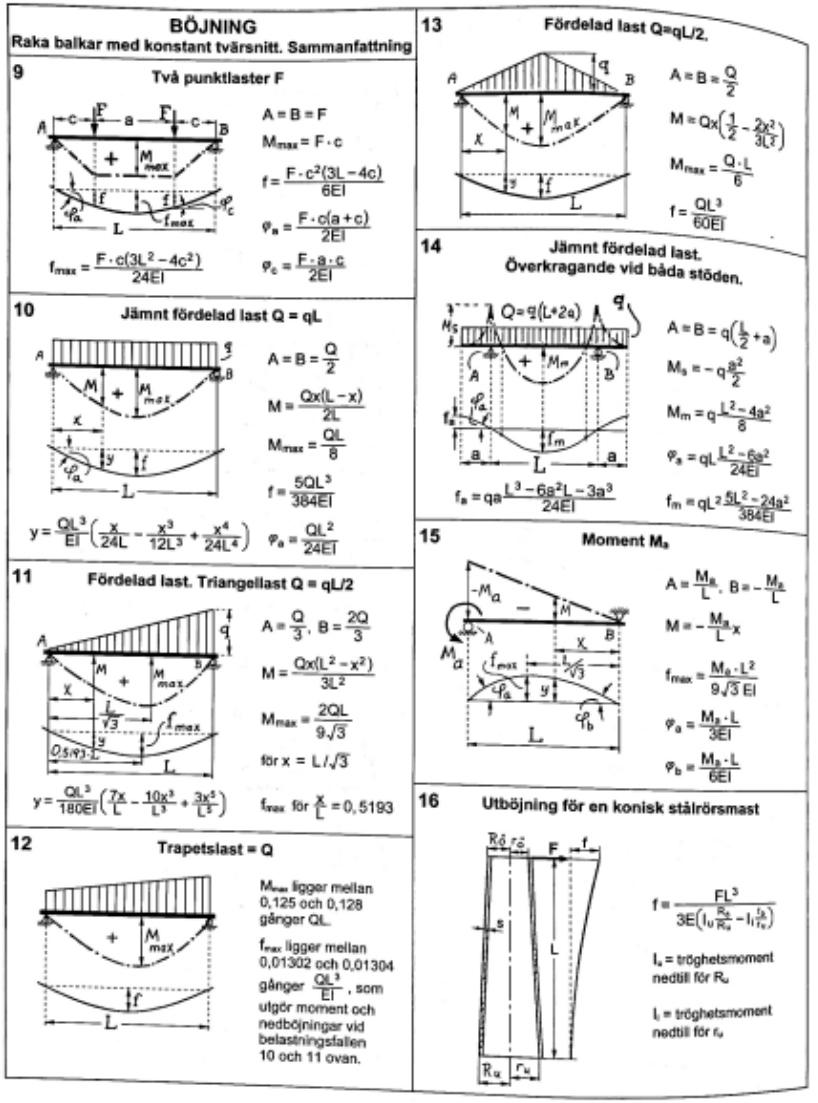
$$\uparrow: \quad V(x) = F_A - F_1 \cdot u(x-a) - q \cdot (x-b) \cdot u(x-b)$$

$$\curvearrowleft: \quad M(x) = F_A \cdot x - F_1 \cdot (x-a) \cdot u(x-a) - q \cdot \frac{(x-b)^2}{2} \cdot u(x-b)$$

Elementarfall (utdrag ur KB Formelsamling)

Ofta kan man utnyttja elementarfall istället för att manuellt beräkna kraft- och momentfördelning.
Man kan också kombinera flera elementarfall genom superposition.



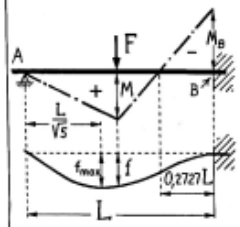


Elementarfall forts.

BÖJNING Raka balkar med konstant tvärsnitt.
Bending. Straight beams with constant cross sections.

Statiskt obestämda belastn.fall. *Statically indeterminate*

17 Punktlast F på mitten. Inspänd vid B



$A = \frac{5}{16}F$, $B = \frac{11}{16}F$

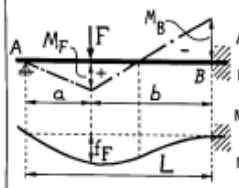
$M = \frac{5}{32}F \cdot L$ (mitt)

$M_B = -\frac{6}{32}F \cdot L$

$f = \frac{7FL^3}{768EI}$

$f_{max} = \frac{7FL^3}{48\sqrt{5}\,EI}$

18 Punktlast på avståndet a från A



$A = F\left(1 + \frac{a^3}{2L^3} - \frac{3a}{2L}\right)$

$B = F - A$

$M_F = Fa\left(1 + \frac{a^3}{2L^3} - \frac{3a}{2L}\right)$

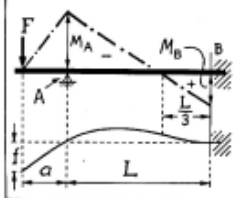
$M_B = -Fa\frac{L^2 - a^2}{2L^2}$

$M_{Fmax} = 0{,}174F \cdot L$ för $a = 0{,}366 \cdot L$

$M_{Bmax} = -0{,}1925F \cdot L$ för $a = 0{,}577 \cdot L$

$f_F = F\frac{a^2b^3}{12EIL^3}(a + 3L)$

19 Punktlast på överkragande balkdel. Inspänd i B



$A = F\left(\frac{3a}{2L} + 1\right)$

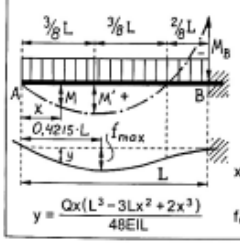
$B = -F\frac{3a}{2L}$

$M_A = -Fa$

$M_B = F\frac{a}{2}$

$f = \frac{Fa^2(4a + 3L)}{12EI}$

20 Jämnt fördelad last. Q = qL



$A = \frac{3}{8}Q$, $B = \frac{5}{8}Q$

$M = \frac{Qx}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{L}\right)$

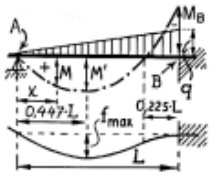
$M_B = -\frac{QL}{8}$

$x = \frac{3}{8}L$; $M' = \frac{9}{16} \cdot \frac{QL}{8}$

$y = \frac{Qx(L^3 - 3Lx^2 + 2x^3)}{48EIL}$

$f_{max} = \frac{QL^3}{185EI}$

21 Fördelad last Q = qL/2. Triangellast



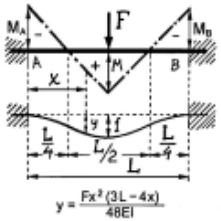
$A = \frac{Q}{5}$, $B = \frac{4Q}{5}$

$M = Qx\left(\frac{1}{5} - \frac{x^2}{3L^2}\right)$

$M_B = -\frac{2}{15}QL$

för $x = 0{,}477 \cdot L$: $f_{max} = \frac{QL^3}{210EI}$, $M' = 0{,}0596 \cdot QL$

22 Punktlast på mitten



$A = B = \frac{F}{2}$

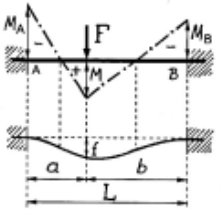
$M = \frac{F \cdot L}{8}$ (mitt-mom.)

$M_A = M_B = -\frac{F \cdot L}{8}$

$f = \frac{FL^3}{192EI}$

$y = \frac{Fx^2(3L - 4x)}{48EI}$

23 Punktlast F på avstånd a från A



$A = \frac{Fb(L^2 - a^2 + ab)}{L^3}$

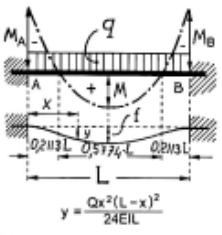
$B = F - A$

$M_A = -\frac{Fab^2}{L^2}$

$M_B = -\frac{Fba^2}{L^2}$

Vid lasten F: $f = \frac{Fa^3b^3}{3EIL^3}$, $M = \frac{2Fa^2b^2}{L^3}$

24 Jämnt fördelad last. Q = qL



$A = B = \frac{Q}{2}$

$M = \frac{Q \cdot L}{24}$ (mitt-mom.)

$M_A = M_B = -\frac{Q \cdot L}{12}$

$f = \frac{QL^3}{384EI}$

$y = \frac{Qx^2(L - x)^2}{24EIL}$

Övningsexempel

Rita upp kraft- och momentdiagram för balkarna i nedanstående exempel.

1. **Fritt upplagd balk med punktlast i mitten**
Balklängd: 6 m
Stöd: Enkla stöd i båda ändar
Last: 10 kN punktlast i mitten

2. **Fritt upplagd balk med jämnt fördelad last**
Balklängd: 8 m
Stöd: Enkla stöd i båda ändar
Last: 5 kN/m jämnt fördelad över hela balken

3. **Fritt upplagd balk med två punktlaster**
Balklängd: 10 m
Stöd: Enkla stöd i båda ändar
Last: 8 kN vid 3 m, 6 kN vid 7 m

4. **Fritt upplagd balk med triangulär last**
Balklängd: 6 m
Stöd: Enkla stöd i båda ändar
Last: Triangulär last från 0 kN/m till 6 kN/m över hela balken

5. **Konsolbalk med punktlast i änden**
Balklängd: 4 m
Stöd: Fast inspänd i ena änden
Last: 12 kN punktlast i fria änden

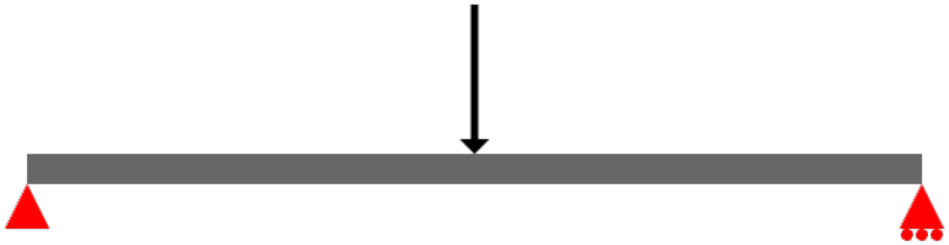
6. **Konsolbalk med jämnt fördelad last**
Balklängd: 5 m
Stöd: Fast inspänd i ena änden
Last: 4 kN/m över hela balken

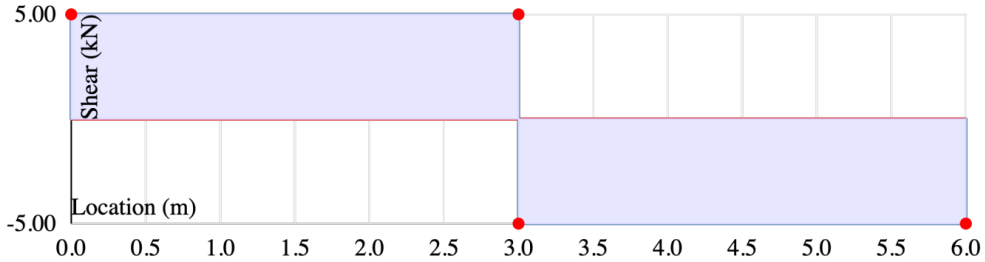
7. **Balk med överhäng och punktlast**
Balklängd: 8 m (6 m mellan stöd, 2 m överhäng)
Stöd: Enkla stöd vid 0 m och 6 m
Last: 5 kN punktlast i änden av överhänget

8. **Balk med momentlast**
Balklängd: 6 m
Stöd: Enkla stöd i båda ändar
Last: 10 kNm moment vid 3 m

9. **Balk med kombinerad last**
Balklängd: 10 m
Stöd: Enkla stöd i båda ändar
Last: 6 kN/m över hela balken + 10 kN punktlast vid 7 m

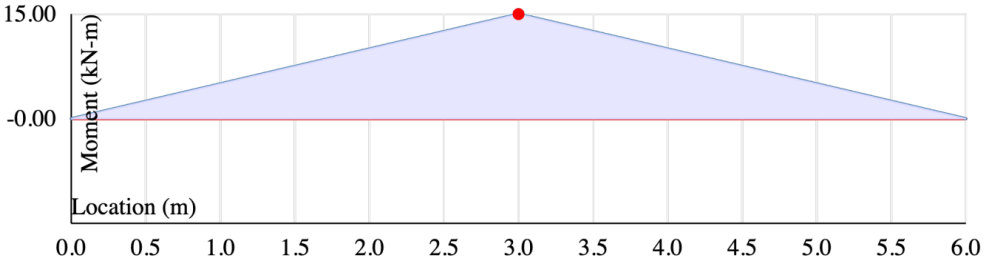
FACIT – Exempel 1





(Max +ve)Shear Load (kN): 5.000, Location (m): 0.000, 3.000

(Max -ve)Shear Load (kN): -5.000, Location (m): 3.000, 6.000



(Max +ve)Moment Load (kN-m): 15.000, Location (m): 3.000